

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
MÜNSTER

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ

A. E. INGHAM H. KNESER O. PERRON

W. SÜSS H. WEYL

52. BAND 4. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 1. DEZEMBER 1949)



BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG

1949

Math.
Z.

Preis DMark 36.60

erscheint zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von etwa 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Eßlinger Straße 16,

K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,

R. Nevanlinna, Helsinki,

E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstr. 8 (Mathematisches Institut),

F. K. Schmidt, Münster/W., Schlaunstr. 4.

52. Band.

Inhalt:

4. Heft.

Seite

Buchholz, Dr. H., Heidelberg, Steubenstr. 44: Uneigentliche Integrale mit parabolischen Funktionen über einen der beiden Parameter.....	355
Wielandt, Prof. Dr. H., Mainz, Göttemannstr. 2 ⁵ / ₁₀ : Zur Theorie der einfachen transitiven Permutationsgruppen. II.....	384
Steuerwald, Prof. Dr. R., Alzing 49 ¹ / ₃ , Post Bergen 2 (Obb.): Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn J. Heinhold.....	394
Strubecker, Prof. Dr. K., Karlsruhe, Hertzstraße 14 (Westhochschule): Über die Flächen, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören.....	401
Töpfer, Dr. H., Solingen, Dammstr. 6: Über die meromorphen Lösungen der Differenzengleichung $F(z+1) = \frac{R_1(z)F(z) + R_2(z)}{F(z) + R_3(z)}$ mit rationalen $R_v(z)$	436
Kommerell, Prof. Dr. K., Tübingen, Steinlachallee 36: Mehrfach ausgeartete Desarguesche Konfigurationen.....	472
Lorenzen, Dr. P., Bonn/Rhein, Luisenstr. 3: Über halbgeordnete Gruppen	483

Uneigentliche Integrale mit parabolischen Funktionen über einen der beiden Parameter.

Von

Herbert Buchholz in Darmstadt.

I. Einleitung.

Wir nehmen für die nachstehenden Untersuchungen als Ausgangspunkt die beiden recht allgemeinen Reihenentwicklungen (1) und (2). Die einzelnen Glieder der Reihe (1) enthalten u. a. das Produkt von

$$(1) \quad \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda + \alpha + 1)}{\lambda!} h^{\lambda} \cdot M_{\kappa_1 + \lambda, \frac{\mu_1}{2}}(t) \cdot M_{\kappa_2 + \lambda, \frac{\mu_2}{2}}(\tau) \\ = \frac{\Gamma(1 + \mu_1) \Gamma(1 + \mu_2) \Gamma(1 + \alpha - \mu_1) \Gamma(1 + \alpha - \mu_2)}{(2\pi i)^2}$$

$$\int_0^{(t+)} \int_0^{(\tau+)} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1+h}{1-h} (u+v)} (u \cdot v)^{\alpha/2} \cdot t^{\frac{1-\mu_1}{2}} \cdot \tau^{\frac{1-\mu_2}{2}} \cdot \frac{h^{-\alpha/2}}{1-h} \cdot (u-t)^{\frac{\mu_1-\alpha}{2}-1} \\ \cdot (v-\tau)^{\frac{\mu_2-\alpha}{2}-1} \cdot I_{\alpha} \left(2 \sqrt{uv} \cdot \frac{h^{1/2}}{h-1} \right)$$

$$M_{\frac{\alpha+1}{2}-\kappa_1, \frac{\mu_1-\alpha-1}{2}}(u-t) \cdot M_{\frac{\alpha+1}{2}-\kappa_2, \frac{\mu_2-\alpha-1}{2}}(v-\tau) \cdot du \cdot dv$$

$$(\Re(\alpha) > -1, |h| < 1, \operatorname{arc}_a(u-t, v-\tau) = -\pi)$$

zwei konfluenten hypergeometrischen oder parabolischen Funktionen der ersten Art, die durch das Funktionszeichen $M_{\kappa, \mu/2}(z)$ bezeichnet werden. Sie haben in der Reihe (1) sowohl verschiedene Argumente als auch verschiedene erste und zweite Parameter. Außerdem nimmt in dieser Reihe in beiden Funktionen der vordere Parameter von Glied zu Glied um die Einheit zu. Die Reihe (1) konvergiert absolut und gleichmäßig für jedes $|h| < 1$ bei sonst beliebigen Werten der κ, μ, t und τ . Auf die Möglichkeit des Nachweises dieser Behauptung werden wir sowieso im Text zu sprechen kommen. Der Summenwert der Reihe (1) wurde zuerst von A. ERDELY in [1] angegeben mit dem einzigen Unterschied gegenüber (1), daß er auf der rechten Seite statt der Schleifenintegrale gewöhnliche Linienintegrale verwendet. Wir ziehen aus gleich erkennbar werdenden Gründen die hier gewählte Schreibweise vor.

In der ersten Form der Reihe (2) werden die einzelnen Reihenglieder im wesentlichen von dem Produkt zweier konfluenten hyper-

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1+\lambda)}{\lambda!} \cdot (-h)^{\lambda} \cdot W_{-\lambda-\frac{\mu+1}{2}, \frac{\mu}{2}}(s) \cdot W_{+\lambda+\frac{\mu+1}{2}, \frac{\mu}{2}}(t) \\
 &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1+\lambda) \Gamma(\mu+1+\lambda)}{\Gamma(\mu+1) \cdot \lambda!} \cdot h^{\lambda} \cdot W_{-\lambda-\frac{\mu+1}{2}, \frac{\mu}{2}}(s) \cdot M_{\lambda+\frac{\mu+1}{2}, \frac{\mu}{2}}(t) \\
 &= e^{-t/2} \cdot t^{\frac{1+\mu}{2}} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} \Gamma(\alpha+1+\lambda) \cdot h^{\lambda} \cdot W_{-\lambda-\frac{\mu+1}{2}, \frac{\mu}{2}}(s) \cdot L_{\lambda}^{(\mu)}(t) \\
 &= (s \cdot t)^{\frac{\mu+1}{2}} \cdot e^{-(s+t)/2} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\mu+1)} \cdot \int_0^{\infty} e^{-w \cdot s} \cdot \frac{w^{\mu} (1+w)^{\mu}}{[w(1-h)+1]^{1+\alpha}} \\
 &\quad \cdot {}_1F_1\left(\alpha+1, \mu+1; -\frac{ht \cdot w}{1+w(1-h)}\right) \cdot dw \\
 &\quad (|h| < 1, \Re(\mu) > -1, \alpha \neq -1, -2 \dots)
 \end{aligned}$$

geometrischen Funktionen der zweiten Art gebildet, für die das Symbol $W_{\lambda, \mu/2}(z)$ üblich geworden ist. Da aber z. B. nach der unter (2) genannten Arbeit für ein $\lambda = 0, 1, 2 \dots$

$$\begin{aligned}
 W_{\lambda+\frac{\mu+1}{2}, \frac{\mu}{2}}(t) &= (-)^{\lambda} \cdot \frac{\Gamma(\mu+\lambda+1)}{\Gamma(\mu+1)} \cdot M_{\lambda+\frac{\mu+1}{2}, \frac{\mu}{2}}(t) \\
 &= t^{(1+\mu)/2} \cdot e^{-t/2} \cdot (-)^{\lambda} \cdot \lambda! \cdot L_{\lambda}^{(\mu)}(t)
 \end{aligned}$$

ist, so kann die Reihe (2) auch noch in den anderen beiden angegebenen Formen geschrieben werden. Dabei bedeutet dann $L_{\lambda}^{(\mu)}$ das LAGUERRE-Polynom in derselben Definition wie in der Arbeit [2]. Die Reihe (2) konvergiert ebenfalls absolut und gleichmäßig für jedes $|h| < 1$ und $\Re(\mu) > -1$ bei sonst beliebigen reellen oder komplexen Werten von s und t . Ihr Summenwert wurde für einen ein wenig spezielleren Fall ($\alpha = \mu$) bereits in der Arbeit [2] hergeleitet. Im vorliegenden Fall kann er auf genau die gleiche Weise bestimmt werden.

Die angeführten beiden Reihen sollen im folgenden dazu benutzt werden, um aus ihnen eine Reihe weiterer allgemeiner Beziehungen zu gewinnen, die besonders für die mathematische Darstellung der verschiedenen Wellentypen von Bedeutung sind. Dabei hat der hier gewählte Weg den großen Vorzug, durch geeignete Spezialisierung des hinteren Parameters μ gleichzeitig die Beziehungen für die Wellentypen in den Koordinaten des Drehparabols und des parabolischen Zylinders zu liefern.

Für das eingeschlagene Verfahren ist es z. T. wesentlich, daß die Reihen zunächst in Integrale verwandelt werden, die über den vorderen Parameter erstreckt werden. Das hat seinen inneren Grund darin, daß die verschiedenen auszuführenden Rechenoperationen wohl an den Integralen, nicht aber an den Reihen ausgeführt werden können.

Wir beginnen zunächst mit der Umwandlung der ersten Reihe in ein solches Integral. Wegen der Formeln, die dazu benötigt werden und die das asymptotische Verhalten der beiden konfluenten hypergeometrischen Funktionen für große Werte des vorderen Parameters beschreiben, werden wir der Einfachheit halber stets auf die Arbeit [2] verweisen, auf die im Text auch als Bericht Bezug genommen wird.

1.1. Ein Integral über den vorderen Parameter zweier M-Funktionen.

Wir knüpfen unmittelbar an die obige Gl. 1 (1) an und setzen darin im Hinblick auf die weiteren Rechnungen

$$h^{1/2} = \pm i \cdot \operatorname{tg} \varphi/2 \quad t = -i \xi' \quad \tau = +i \eta' \quad (\xi', \eta' > 0, i = \sqrt{-1}).$$

Sie nimmt dann nach den Substitutionen $u = -ix$ und $v = +iy$ die Form der Gl. (1) an, denn es ist $I_\alpha(\pm iz) = \exp(\pm \pi i \alpha/2) \cdot J_\alpha(z)$.

$$\begin{aligned} (1) \quad K(-i\xi', +i\eta'; -\operatorname{tg}^2 \varphi/2) &\equiv \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+\alpha+1)}{\lambda!} \cdot (-)^{\lambda} \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^{2\lambda} \\ &\quad \cdot M_{x_1+\lambda, \frac{\mu_1}{2}}(-i\xi') \cdot M_{x_2+\lambda, \frac{\mu_2}{2}}(+i\eta') \\ &= \cos^2 \varphi/2 \cdot (\operatorname{tg} \varphi/2)^{-\alpha} \cdot \xi'^{\frac{1-\mu_1}{2}} \cdot \eta'^{\frac{1-\mu_2}{2}} \\ &\quad \cdot \frac{\Gamma(1+\mu_1) \Gamma(1+\mu_2) \Gamma(1+\alpha-\mu_1) \Gamma(1+\alpha-\mu_2)}{(2\pi i)^2} \cdot \int_0^{(\xi'+)} \int_0^{(\eta'+)} e^{\frac{i}{2} \cdot \cos \varphi \cdot (x-y)} \cdot (xy)^{\alpha/2} \cdot \\ &\quad (x-\xi')^{\frac{\mu_1-\alpha}{2}} \cdot (y-\eta')^{\frac{\mu_2-\alpha}{2}} \cdot J_\alpha\left(2\sqrt{xy} \cdot \frac{\sin \varphi}{2}\right) \\ &\quad \cdot M_{\frac{\alpha+1}{2}-x_1, \frac{\mu_1-\alpha-1}{2}}(-i(x-\xi')) \cdot M_{\frac{\alpha+1}{2}-x_2, \frac{\mu_2-\alpha-1}{2}}(+i(y-\eta')) \cdot dx \cdot dy \\ &\quad \left(\left|\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right| < 1, \Re(\alpha) > 0, \operatorname{arc}_\alpha(x-\xi', y-\eta') = -\pi\right). \end{aligned}$$

Nun kann man aber offenbar für ein $\varepsilon \rightarrow 0$ wegen $\Gamma(-\lambda-\varepsilon) \rightarrow -1/\varepsilon$ $\cdot (-)^{\lambda}/\lambda!$ nach dem Residuensatz von CAUCHY die erste Zeile dieser Gleichung auch wie folgt anschreiben:

$$\begin{aligned} K(-i\xi', +i\eta', -\operatorname{tg}^2 \varphi/2) &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{+\infty \cdot \operatorname{arc}_\alpha(0)}^{(0+)} P(-s') \Gamma(s'+\alpha+1) \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^{2s'} \\ &\quad \cdot M_{x_1+s', \frac{\mu_1}{2}}(-i\xi') \cdot M_{x_2+s', \frac{\mu_2}{2}}(+i\eta') \cdot ds'. \end{aligned}$$

Darin kommt der Integrationsweg vom Punkte $+\infty \cdot \operatorname{arc}_\alpha(0)$ ¹⁾ her, verläuft dicht oberhalb der positiv reellen z -Achse, umschlingt den Null-

¹⁾ Durch die Bezeichnung $\infty \cdot \operatorname{arc}_\alpha(0)$ soll ausgedrückt werden, daß der Weg vom Punkt ∞ herkommt und anfangs der Phasenwinkel von s' dabei gleich Null ist.

punkt im mathematisch positiven Sinne und zieht dicht unterhalb der positiv reellen s -Achse wieder zum Punkt ∞ zurück. Innerhalb dieses Integrationsweges liegen mithin einzig und allein die unendlich vielen einfachen Pole der Funktion $\Gamma(-s')$ in den Punkten $s' = \lambda$ mit $\lambda = 0, 1, 2, \dots$. Die Konvergenz dieses Integrals ist dabei von genau derselben Art wie die der unendlichen Reihe in (1). Sie ist also für ein $|\operatorname{tg}(\varphi/2)| < 1$ mit Sicherheit für beliebige Werte der verschiedenen Parameter vorhanden. Das letzte Integral läßt sich noch etwas symmetrischer schreiben, indem man $s' = s - (1 + \alpha)/2$ setzt. Damit ist dann bis jetzt die Gl. (2) entstanden, in der u. a. der Parameter α

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & -\frac{1}{2\pi i} \int_{\infty \cdot \operatorname{arc}_a(0)}^{((\alpha+1)/2 +)} \Gamma\left(-s + \frac{\alpha+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(s + \frac{\alpha+1}{2}\right) \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^{2s} \\
 & \cdot \frac{M_{\alpha_1 - \frac{\alpha+1}{2} + s, \frac{\mu_1}{2}}(-i\xi')}{\Gamma(1+\mu_1)} \cdot \frac{M_{\alpha_2 - \frac{\alpha+1}{2} + s, \frac{\mu_2}{2}}(+i\eta')}{\Gamma(1+\mu_2)} \cdot ds \equiv \\
 & \equiv K\left(-i\xi', +i\eta', -\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^{\alpha+1}}{\Gamma(1+\mu_1) \Gamma(1+\mu_2)} \\
 & = \frac{1}{2} \cdot \sin \varphi \cdot \xi'^{\frac{1-\mu_1}{2}} \cdot \eta'^{\frac{1-\mu_2}{2}} \cdot \frac{\Gamma(1+\alpha-\mu_1) \Gamma(1+\alpha-\mu_2)}{(2\pi i)^2} \\
 & \cdot \int_0^{(\xi'+)} \int_0^{(\eta'+)} e^{+\frac{i}{2} \cdot \cos \varphi (x-y)} \cdot (xy)^{\alpha/2} \cdot (x-\xi')^{\frac{\mu_1-\alpha}{2}-1} \cdot (y-\eta')^{\frac{\mu_2-\alpha}{2}-1} \\
 & \cdot J_\alpha\left(2\sqrt{xy} \cdot \frac{\sin \varphi}{2}\right) \cdot \frac{M_{\alpha+1-\alpha_1, \frac{\mu_1-\alpha-1}{2}}(-i(x-\xi'))}{2} \\
 & \cdot \frac{M_{\alpha+1-\alpha_2, \frac{\mu_2-\alpha-1}{2}}(+i(y-\eta'))}{2} \cdot dx \cdot dy \\
 & \left(\Re(\alpha) > -1; \operatorname{arc}_a(x-\xi', y-\eta') = -\pi; \left|\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right| < 1\right)
 \end{aligned}$$

jeden beliebigen Wert haben kann, der mit der Forderung $\Re(\alpha) > -1$ verträglich ist.

Es fragt sich jetzt, inwieweit es möglich ist, auf der linken Seite von Gl. (2) den Integrationsweg so weit zu öffnen, bis er parallel zur imaginären Achse der z -Ebene verläuft. Wenn das ohne den Einzug einer Schleife in diesen Weg möglich sein soll, so muß im Integranden von (2) der äußerste linke Pol in der nach rechts laufenden Polkette immer noch rechts von dem äußersten rechten Pol der nach links strebenden Polkette liegen, d. h. es muß $-(1 + \Re(\alpha))/2 < (1 + \Re(\alpha))/2$ oder $\Re(\alpha) > -1$ sein. Unter den Gültigkeitsbedingungen der Gl. (2) gehört also ein geradliniger und parallel zur imaginären Achse verlaufender Weg auch stets zu den geometrisch möglichen. Es bleibt mithin nur noch nachzuprüfen, ob der Übergang von dem Integrations-

weg (2) zu einem solchen geradlinigen Weg auch zulässig ist. Wir wollen den Nachweis dafür unter Beschränkung auf reelle Werte von μ_1 und μ_2 führen. Dagegen mögen α und $\operatorname{tg}(\varphi/2)$ komplexwertig sein.

Zu diesem Zweck müssen wir das Verhalten des Absolutbetrages des Integranden von (2) auf dem rechten unendlich fernen Halbkreis der s -Ebene kennen. Nun ist mit $s = |s| \cdot \exp(i\chi)$ [2]

$$(3a) \quad \left| \Gamma\left(s + \frac{\alpha+1}{2}\right) \Gamma\left(-s + \frac{\alpha+1}{2}\right) \right| = \left| \frac{-\pi}{\cos \pi \left(s - \frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(s + \frac{1+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(s + \frac{1-\alpha}{2}\right)} \right|$$

$$\sim \begin{cases} 2\pi \cdot \exp[\Re(\alpha) \cdot \ln |s| - \chi \cdot \Im(\alpha) - \pi \cdot |s| \cdot |\sin \chi|] & (0 < |\chi| \leq \frac{\pi}{2}) \\ \left| \frac{\pi}{\cos \pi \left(s - \frac{\alpha}{2}\right)} \right| \cdot \exp(\Re(\alpha) \cdot \ln |s|) & (\chi = 0) \end{cases}$$

$$(3b) \quad \left| \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^{2s} \right| \sim \exp \left\{ 2|s| \cdot \left[\cos \chi \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right| - \sin \chi \cdot \operatorname{arc} \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \right] \right\}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right| e^{i \cdot \operatorname{arc} \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)}.$$

Die Verschiedenartigkeit des Ausdrucks für den Absolutbetrag des Produkts der beiden Γ -Funktionen im Falle eines $\chi = 0$ und $\chi \neq 0$ können wir demnach für den vorliegenden Zweck außer Betracht lassen, wenn wir nur ein für allemal die Übereinkunft treffen, daß der unendlich ferne Halbkreis nicht gerade durch eine Nullstelle von $\cos(\pi(s - \alpha/2))$ geht. Das läßt sich aber offenbar stets so einrichten. Aus demselben Grunde darf auch der asymptotische Näherungsausdruck für den Absolutbetrag von $M_{\mu/2}(\pm i\eta)$ im Falle eines $|s| \rightarrow \infty$ für den ganzen Winkelbereich $|\chi| \leq \pi/2$ in Anspruch genommen werden. Damit bekommt man dann im ganzen für den Absolutbetrag des Integranden von Gl. (2) für ein $|s| \rightarrow \infty$ im Winkelbereich $|\operatorname{arc}(s)| \leq \pi/2$

$$(3) \quad \frac{1}{2} \cdot (\xi' \eta')^{1/4} \cdot |s|^{\Re(\alpha) - \frac{\mu_1 + \mu_2 + 1}{2}} \cdot \exp \left\{ 2 \cdot |s| \cdot \left[\cos \chi \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right| - \sin \chi \cdot \operatorname{arc} \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{\pi}{2} \cdot |\sin \chi| \right] + 2 \cdot \sqrt{|s|} \cdot \left[\sqrt{\xi'} \cdot \left| \sin \left(\frac{\chi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right| + \sqrt{\eta'} \cdot \left| \sin \left(\frac{\chi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right] - \sigma \cdot \Im(\alpha) \right\} \quad \left(|s| \rightarrow \infty, |\chi| \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

die asymptotische Darstellung (3). Für $\chi = 0$ beschreibt sie im besonderen das Verhalten des Integranden von (2) auf dem zu (2) gehörenden, die positiv reelle s -Achse eng umschlingenden Schleifenweg. Für die Konvergenz dieses Integrals ist also, wie wir schon wissen, erforderlich, daß $|\operatorname{tg}(\varphi/2)| < 1$ ist. Für $\chi = \pm \pi/2$ ergibt sich aus (3) im besonderen die Bedingung für die Konvergenz des Integrals (2), wenn sein Integrationsweg eine Parallele zur imaginären Achse der

s -Ebene ist. Bei dieser Wegführung hat mithin gemäß (3) der Absolutbetrag von $\operatorname{tg}(\varphi/2)$ für die Konvergenz keinerlei Bedeutung mehr, sondern es kommt jetzt allein auf den Phasenwinkel des reell- oder komplexwertigen $\operatorname{tg}(\varphi/2)$ an, und zwar muß mit Rücksicht auf die Konvergenz $|\operatorname{arc}(\operatorname{tg}(\varphi/2))| < \pi/2$ sein. Bei einem reellen Winkel φ z. B. verschwindet also der Integrand von (2) auf den unendlich fernen Wegteilen wie $\exp(-\pi \cdot |s|)$, und die Überführung des einen Integrationsweges in den anderen ist infolgedessen immer statthaft, wenn gleichzeitig $|\operatorname{tg}(\varphi/2)| < 1$ und $|\operatorname{arc}(\operatorname{tg}(\varphi/2))| < \pi/2$ ist.

Bezeichnet dann σ denjenigen positiven oder negativen reellen Wert von s , der als die Schnittpunktsabzisse des geradlinigen, zur imaginären Achse parallelen Weges mit der reellen s -Achse aufgefaßt werden kann, so nimmt nunmehr die Gl. (2) die Gestalt der Gl. (4) an.

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \Gamma\left(-s + \frac{\alpha+1}{2}\right) \Gamma\left(+s + \frac{\alpha+1}{2}\right) \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^{2s} \\
 & \cdot \frac{M_{\kappa_1 - \frac{\alpha+1}{2} + s, \frac{\mu_1}{2}}(-i\xi')}{\Gamma(1+\mu_1)} \cdot \frac{M_{\kappa_2 - \frac{\alpha+1}{2} + s, \frac{\mu_2}{2}}(+i\eta')}{\Gamma(1+\mu_2)} \cdot ds \\
 & = \frac{1}{2} \cdot \sin \varphi \cdot \xi'^{\frac{1-\mu_1}{2}} \cdot \eta'^{\frac{1-\mu_2}{2}} \cdot \frac{\Gamma(1+\alpha-\mu_1) \Gamma(1+\alpha-\mu_2)}{(2\pi i)^2} \\
 & \cdot \int_0^{(\xi'+)} \int_0^{(\eta'+)} e^{+\frac{i}{2} \cdot \cos \varphi \cdot (x-y)} \cdot (xy)^{\alpha/2} \cdot (x-\xi')^{\frac{\mu_1-\alpha}{2}-1} \cdot (y-\eta')^{\frac{\mu_2-\alpha}{2}-1} \\
 & \times J_\alpha\left(2\sqrt{xy} \cdot \frac{\sin \varphi}{2}\right) \cdot M_{\frac{\alpha+1}{2}-\kappa_1, \frac{\mu_1-\alpha-1}{2}}(-i(x-\xi')) \\
 & \cdot M_{\frac{\alpha+1}{2}-\kappa_2, \frac{\mu_2-\alpha-1}{2}}(+i(y-\eta')) \cdot dx \cdot dy \\
 & (\Re(\alpha) > -1, \operatorname{arc}_\alpha(x-\xi', y-\eta') = -\pi; \\
 & \left|\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)\right| < \frac{\pi}{2}, |\sigma| < \frac{1+\Re(\alpha)}{2}).
 \end{aligned}$$

Die oben eingeführte Beschränkung auf reelle Werte von μ_1 und μ_2 , die nur im Hinblick auf die einfachere Schreibweise der Gl. (3) erfolgt war, kann im übrigen auch fallen gelassen werden, ohne daß deswegen an den Konvergenzbedingungen etwas Wesentliches zu ändern wäre.

Daß man von (4) wieder zu (2) zurückgelangen kann, indem man für ein $|\operatorname{tg}(\varphi/2)| < 1$ und ein $|\operatorname{arc}(\operatorname{tg}(\varphi/2))| < \pi/2$ den Integrationsweg in (4) von oben und unten her nach rechts an die positiv reelle s -Achse heranlegt und auf die dort liegenden Pole zusammenzieht, versteht sich von selbst. Es liegt dabei aber nahe, die Frage aufzuwerfen, ob es nicht auch zulässig ist, den Integrationsweg von (4) nach links an die negativ reelle Achse der s -Ebene heranzuführen.

Die Antwort auf diese Frage läßt sich leicht finden, denn sie läuft offenbar auf die andere gleichwertige Frage hinaus, ob es auch noch statthaft ist, in (4) den Integrationsweg wie bisher nach rechts herumzulegen, nachdem man vorher im Integranden durchweg s durch $-s$ ersetzt hat. Da nun aber nach Gl. 1. 21 (5) z. B.

$$\begin{aligned} M_{\alpha_1 - \frac{\alpha+1}{2} - s, \frac{\mu_1}{2}}(-i\xi') &\equiv M_{\alpha_1 - \frac{\alpha+1}{2} - s, \frac{\mu_1}{2}}(+i\xi') \cdot e^{-\pi i} \\ &= e^{-\frac{\pi i}{2}(1+\mu_1)} \cdot M_{-\alpha_1 + \frac{\alpha+1}{2} + s, \frac{\mu_1}{2}}(+i\xi') \end{aligned}$$

ist, so läßt sich nach dieser Substitution für die erste Zeile der Gl. (4) schreiben:

$$\begin{aligned} (4') \quad & \frac{e^{+\frac{\pi i}{2}(\mu_2 - \mu_1)}}{2\pi i} \int_{+\sigma - i\infty}^{+\sigma + \infty i} \Gamma\left(+s + \frac{\alpha+1}{2}\right) \Gamma\left(-s + \frac{\alpha+1}{2}\right) \cdot \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}\right)^{2s} \\ & \cdot \frac{M_{-\alpha_1 + \frac{\alpha+1}{2} + s, \frac{\mu_1}{2}}(+i\xi')}{\Gamma(1+\mu_1)} \cdot \frac{M_{-\alpha_2 + \frac{\alpha+1}{2} + s, \frac{\mu_2}{2}}(-i\eta')}{\Gamma(1+\mu_2)} \cdot ds. \end{aligned}$$

Der Absolutbetrag des im Winkelraum $|\operatorname{arc}(s)| \leq \pi/2$ gültigen asymptotischen Näherungswertes dieses Integranden weicht aber von (3) nur insofern ab, als darin jetzt $\operatorname{tg}(\varphi/2)$ durch $\operatorname{ctg}(\varphi/2)$ zu ersetzen ist und die Vorzeichen der beiden $\pi/4$ -Summanden in der zweiten Zeile von (3) zu vertauschen sind; der Übergang von dem geradlinigen Integrationsweg von (4') zu dem Schleifenweg um die positiv reelle Achse herum, darf also auch im vorliegenden Falle vollzogen werden, falls jetzt die Ungleichungen

$$|\operatorname{ctg}(\varphi/2)| < 1 \quad \text{und} \quad |\operatorname{arc}(\operatorname{ctg}(\varphi/2))| < \pi/2$$

erfüllt sind. Löst man nun noch das Integral (4') nach dem Residuensatz auf und beachtet dabei die Gl. (2), um den Zusammenhang mit der Größe K von Gl. (1) zu gewinnen, so gelangt man zu der Entwicklung (5), deren Konvergenz es nur mehr erfordert, daß

$$\begin{aligned} (5) \quad K\left(-i\xi', +i\eta', -\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}\right) &= e^{+\frac{\pi i}{2}(\mu_2 - \mu_1)} \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}\right)^{2(\alpha+1)} \\ & \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda + \alpha + 1)}{\lambda!} \cdot (-)^{\lambda} \cdot \left[\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}\right]^{2\lambda} \left(|\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}| < 1\right) \\ & \cdot M_{-\alpha_1 + \alpha + 1 + \lambda, \frac{\mu_1}{2}}(+i\xi') \cdot M_{-\alpha_2 + \alpha + 1 + \lambda, \frac{\mu_2}{2}}(-i\eta') \end{aligned}$$

$|\operatorname{ctg}(\varphi/2)| < 1$ bleibt. Für ein reellwertiges φ mit $|\varphi| < \pi/2$ gestattet also das Doppelintegral der Gl. (1) die dort in der ersten Zeile stehende Reihenentwicklung. Liegt aber φ im Intervall $\pi/2 < |\varphi| < 3\pi/2$, so gehört zu dem Doppelintegral die Reihenentwicklung (5). Die Konvergenzbereiche der beiden Reihenentwicklungen schließen sich also

gegenseitig aus. Der Übergang von der Reihe (1) zu den Integraldarstellungen (2) und (4) hat damit zugleich zu einer Reihentransformation geführt.

Ein wichtiger Sonderfall von (4) liegt in der Wahl der Parameter gemäß der Festsetzung $\mu_1 = \mu_2 = \alpha = \mu$ vor. Dann hat nämlich der Faktor $x - \xi'$ unter dem Doppelintegral insgesamt den Exponenten $\mu_1 - \alpha - 1 = -1$ und ebenso lautet der Exponent von $y - \eta'$. Der Integrand des Doppelintegrals hat mithin in diesem Falle innerhalb der beiden geschlossenen Integrationswege in der komplexen x - und y -Ebene einen einfachen Pol an den Stellen $x = \xi'$ und $y = \eta'$. Die Bestimmung des Integralwertes fällt unter diesen Umständen äußerst einfach aus, und man erhält sofort nach dem Residuensatz von CAUCHY aus (4) die Gl. (6). Obwohl jetzt in dieser Gleichung auf der rechten

$$(6) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \Gamma\left(-s + \frac{\mu+1}{2}\right) \Gamma\left(+s + \frac{\mu+1}{2}\right) \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^{2s} \\ \cdot \frac{M_{\kappa_1 - \frac{\mu+1}{2} + s, \frac{\mu}{2}}(-i\xi')}{\Gamma(1+\mu)} \cdot \frac{M_{\kappa_2 - \frac{1+\mu}{2} + s, \frac{\mu}{2}}(+i\eta')}{\Gamma(1+\mu)} \cdot ds \\ = \frac{1}{2} \cdot \sin \varphi \cdot (\xi' \eta')^{1/2} \cdot e^{+\frac{i}{2} \cdot \cos \varphi \cdot (\xi' - \eta')} \cdot J_\mu(\sqrt{\xi' \eta'} \cdot \sin \varphi) \\ \left(\left| \operatorname{arc} \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \right| < \frac{\pi}{2}, |\sigma| < \frac{1 + \Re(\alpha)}{2} = \frac{1 + \Re(\mu)}{2}, \Re(\mu) > -1 \right)$$

Seite kein Integral mehr auftritt, in Rücksicht auf dessen Konvergenz die Beschränkung von μ auf $\Re(\mu) > -1$ erforderlich wäre, wollen wir doch an dieser Bedingung festhalten, um bei dem Integral auf der linken Seite besondere Schleifenbildungen zu vermeiden. Haben die beiden M -Funktionen in den Integralen (4) und (6) die Argumente $+i\xi'$ und $-i\eta'$, so ergibt sich der Wert dieser Integrale aus (4) und (6), indem man auch auf der rechten Seite dieser Gleichungen ξ' und η' miteinander vertauscht. Wie man sieht, spielen in (6) die Größen κ_1 und κ_2 lediglich die Rolle willkürlicher Parameter. Man könnte also z. B. $\kappa_1 = \kappa_2 = (1 + \mu)/2$ setzen, ohne an dem Ergebnis etwas zu ändern.

Verfährt man mit κ_1 und κ_2 in dieser Weise und löst die linke Seite von (6) durch Zusammenziehen des Integrationsweges auf die positiv reelle s -Achse und Anwendung des CAUCHYSCHEN Satzes in eine unendliche Reihe auf, so geht diese Gleichung in die Beziehung (6a) über. Umgekehrt kann man diese Tatsache auch so ausdrücken:

$$(6a) \quad \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-)^{\lambda} \lambda!}{\Gamma(1+\mu+\lambda)} \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^{2\lambda} \cdot L_{\lambda}^{(\mu)}(x) L_{\lambda}^{(\mu)}(y) \\ = e^{\frac{x+y}{2}(1-\cos \varphi)} \frac{J_\mu(\sqrt{xy} \cdot \sin \varphi)}{(xy)^{\mu/2}} \cdot \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right)^{\mu} \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Verfährt man mit der Reihe (6a) in derselben Weise wie mit der Reihe (1) und wählt dabei als analytische Fortsetzung für die LAGUERRE-Polynome $L_{\lambda}^{(\mu)}(-i\xi')$ bei nicht mehr ganzzahligem Zeiger λ die Funktion $M_{\lambda + \frac{1+\mu}{2}, \frac{\mu}{2}}(-i\xi')$, so würde man auch von der Gl. (6a) aus

zu der Gl. (6) gelangen. Jedoch könnte man auch an eine andere Möglichkeit der analytischen Fortsetzung von $L_{\lambda}^{(\mu)}(-i\xi')$ denken, denn es geht ja auch die Funktion $W_{\kappa, \mu/2}(-i\xi')$ für $\kappa = \lambda + (1+\mu)/2$ im wesentlichen in das eben genannte LAGUERRE-Polynom über. Eine genauere Konvergenzbetrachtung nach Art der oben durchgeführten zeigt aber sofort, daß bei dieser Fortsetzung der zunächst zu benutzende Schleifenweg nicht geöffnet werden dürfte.

Wir besprechen dann noch an dieser Stelle eine Verallgemeinerung der Gl. (6), die auf der bei G. N. WATSON [3] bewiesenen Formel (7)

$$(7) \quad \int_0^{+\pi} e^{+iz \cdot \cos \psi \cdot \cos \varphi} \cdot J_{\mu}(z \cdot \sin \psi \cdot \sin \varphi) \cdot C_r^{\mu+\frac{1}{2}}(\cos \varphi) \cdot \sin^{\mu+1} \varphi \cdot d\varphi \\ = \left(\frac{2\pi}{z}\right)^{1/2} \cdot i^r \cdot \sin^{\mu} \psi \cdot C_r^{\mu+\frac{1}{2}}(\cos \psi) \cdot J_{\mu+r+\frac{1}{2}}(z) \\ \left(r = 0, 1, 2 \dots \Re(\mu) > -\frac{1}{2}\right)$$

beruht, in der $C_r^{\mu+\frac{1}{2}}$ das GEGENBAUER'sche Polynom bedeutet. Multipliziert man demzufolge die Gl. (6) mit $C_r^{\mu+\frac{1}{2}}(\cos \varphi) \cdot \sin^{\mu} \varphi$ und integriert über φ zwischen den Grenzen $0 \dots +\pi$, so steht auf der rechten Seite von (6), von dem Faktor $1/2 \cdot (\xi' \eta')^{1/2}$ abgesehen, dasselbe Integral wie auf der linken Seite von Gl. (7), wenn man noch setzt

$$z \cdot \cos \psi = \frac{1}{2} \cdot (\xi' - \eta') \quad z \cdot \sin \psi = (\xi' \eta')^{1/2} \quad z = \frac{1}{2} \cdot (\xi' + \eta').$$

Auf der linken Seite von (6) hat man es nach der angegebenen Operation und der zulässigen Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen mit dem Integral (8) zu tun, dessen zweite Form aus

$$(8) \quad \int_0^{\pi} \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^{2s} \cdot C_p^{\mu+\frac{1}{2}}(\cos \varphi) \cdot \sin^{\mu} \varphi \cdot d\varphi = (-)^r \cdot \int_0^{\pi} \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^{-2s} \cdot C_r^{\mu+\frac{1}{2}}(\cos \varphi) \cdot \sin^{\mu} \varphi \cdot d\varphi \quad (r = 0, 1, 2 \dots) \\ - (1 + \Re(\mu) < \Re(2s) < 1 + \Re(\mu))$$

der ersten durch die Substitution $\varphi = \pi - \varphi'$ unter Beachtung der Relation $C_r^{\mu}(\cos \varphi) = (-)^r \cdot C_r^{\mu}(\cos \varphi')$ hervorgeht. Auf Grund der bekannten Definitionsgleichung für das GEGENBAUER'sche Polynom ist nun aber die linke Seite von (8) identisch mit

$$\frac{\Gamma(r+2\mu+1)}{r! \Gamma(2\mu+1)} \cdot \sum_{\lambda=0}^r \frac{(-r)_{\lambda} (r+2\mu+1)_{\lambda}}{(\mu+1)_{\lambda}} \cdot \int_0^{\pi} \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^{2s} \cdot \sin^{\mu} \varphi \cdot \sin^{2\lambda} \frac{\varphi}{2} \cdot d\varphi.$$

Wegen

$$\int_0^\pi \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^{2s} \cdot \sin^\mu \varphi \cdot \sin^{2\lambda} \frac{\varphi}{2} \cdot d\varphi = 2^\mu \cdot \int_0^\pi \left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^{2s+\mu+2\lambda} \cdot \left(\cos \frac{\varphi}{2}\right)^{\mu-2s} \\ \cdot d\varphi = 2^\mu \cdot \frac{\Gamma\left(s+\lambda+\frac{\mu+1}{2}\right) \Gamma\left(-s+\frac{\mu+1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda+\mu+1)}$$

ist mithin

$$(8') \quad \int_0^\pi \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^{2s} \cdot C_r^{\mu+\frac{1}{2}}(\cos \varphi) \cdot \sin^\mu \varphi \cdot d\varphi = \frac{2^\mu}{\Gamma(\mu+1)} \cdot \binom{2\mu+r}{2\mu} \\ \cdot \Gamma\left(-s+\frac{\mu+1}{2}\right) \Gamma\left(+s+\frac{\mu+1}{2}\right) \\ \cdot {}_3F_2\left(-r, r+2\mu+1, s+\frac{\mu+1}{2}; 1+\mu, 1+\mu; 1\right) \\ \left(-\frac{1+\Re(\mu)}{2} < \Re(s) < +\frac{1+\Re(\mu)}{2}\right).$$

Gleichzeitig folgt aus (2) und (8') unter Hinweis auf das Prinzip der analytischen Fortsetzung, daß für alle s die Relation (9) gelten muß.

$$(9) \quad {}_3F_2\left(-r, r+2\mu+1, s+\frac{\mu+1}{2}; 1+\mu, 1+\mu; 1\right) = (-)^r \\ \cdot {}_3F_2\left(-r, r+2\mu+1, -s+\frac{\mu+1}{2}, 1+\mu, 1+\mu; 1\right).$$

Aus der Gl. (6) hat sich damit im ganzen die Beziehung (10) ergeben.

$$(10) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \left\{ \Gamma\left(+s+\frac{\mu+1}{2}\right) \Gamma\left(-s+\frac{\mu+1}{2}\right) \right\}^2 \\ \cdot {}_3F_2\left(-r, r+2\mu+1, s+\frac{\mu+1}{2}, 1+\mu, 1+\mu; 1\right) \\ \cdot \frac{M_{\kappa-\frac{\mu+1}{2}+s, \frac{\mu}{2}}(-i\xi')}{\Gamma(1+\mu)} \cdot \frac{M_{\kappa-\frac{\mu+1}{2}+s, \frac{\mu}{2}}(+i\eta')}{\Gamma(1+\mu)} \cdot ds = \pi^{1/2} \cdot i^r \\ \cdot \frac{r! \Gamma(2\mu+1) \Gamma(\mu+1)}{\Gamma(2\mu+r+1)} \cdot \frac{\frac{1+\mu}{2}}{(\xi'+\eta')^{\mu+\frac{1}{2}}} \cdot C_r^{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi'-\eta'}{\xi'+\eta'}\right) \\ \cdot J_{\mu+r+\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi'+\eta'}{2}\right) \\ \left(r=0, 1, 2, \dots, |\sigma| < \frac{1+\Re(\mu)}{2}\right).$$

Hat in dieser Formel auf der linken Seite die erste M -Funktion das Argument $+i\xi'$ und die zweite das Argument $-i\eta'$, was als eine Vertauschung von ξ' und η' aufgefaßt werden kann, so muß die rechte Gleichungsseite bei sonst unverändertem Aufbau mit $(-)^r$ multipliziert werden.

Für die Herleitung der Gl. (10) war es wesentlich, daß in der Ausgangsgl. (6) die Reihe auf der linken Seite in Gestalt eines Parameterintegrals vorlag, weil es sonst gar nicht möglich gewesen wäre, die Integration nach φ zwischen den Grenzen 0 und π durchzuführen. Nachdem nun auf diese Weise für die rechte Seite von Gl. (10) ebenfalls eine Integraldarstellung gewonnen werden konnte, erhebt sich in diesem Zusammenhang sofort die Frage, ob nicht noch nachträglich aus dem Integral eine unendliche Reihe hergeleitet werden kann. Um diese Frage zu entscheiden, brauchen wir lediglich für den Integranden von (10) den in dem abgeschlossenen Winkelbereich $|\chi| \leq \pi/2$ gültigen asymptotischen Näherungswert seines Absolutbetrages aufzustellen. Da für das asymptotische Verhalten von Integranden nach Art der Gl. (10), wie wir schon wissen, allein die exponentiellen Bestandteile den Ausschlag geben, so darf für den vorliegenden Zweck das asymptotische Verhalten der ${}_3F_2$ -Funktion ganz außer Betracht bleiben, da es sich dabei wegen der endlichen Gliederzahl um eine rationale Funktion handelt. Nach dem Bericht (2) besteht nun aber für den übrigen Bestandteil des Integranden der asymptotische Näherungsausdruck:

$$(10a) \quad \frac{1}{2} \cdot (\xi' \eta')^{1/4} \cdot |s|^{\mu - \frac{1}{2}} \cdot \exp \left\{ -2\pi \cdot s \cdot \sin \chi + 2 \sqrt{|s|} \left[\sqrt{\xi'} \left| \sin \left(\frac{\chi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right| + \sqrt{\eta'} \cdot \left| \sin \left(\frac{\chi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right] \right\}.$$

Sobald also beim Herumschwenken des Integrationsweges von (10) der obere oder untere Teil in die Richtung der positiven, reellen s -Achse zu liegen kommt, hört jegliche Konvergenz des Integrals auf. Bei der Gl. (10) ist also eine Verwandlung des Integrals in eine Reihe in der bisher besprochenen Weise nicht möglich.

1. 2. Ein Integral über den vorderen Parameter von vier M -Funktionen.

Wir gehen wieder von der Gl. (6) des vorigen Abschnitts aus, setzen darin der Einfachheit halber $\kappa_1 = \kappa_2 = (\mu + 1)/2$ und denken sie uns nach Vertauschung von ξ' und η' noch ein zweites Mal angeschrieben. In der ersten Gleichung bezeichnen wir fortan ξ' und η' mit ξ'_0 und η'_0 und die Integrationsvariable wie bisher mit s . In der zweiten Gleichung werde zur Unterscheidung von der ersten nunmehr ξ' und η' mit ξ'_1 und η'_1 bezeichnet, die Integrationsvariable mit t und die Integrationsabzisse mit τ . Wir multiplizieren dann beide Gleichungen miteinander, dividieren die neu entstandene Gleichung durch $\sin(\varphi)$ und integrieren sie nach φ , und zwar in einem ersten Gleichungssatz zwischen den Grenzen $0 \dots +\pi/2$ und in einem zweiten, völlig gleichlautenden Gleichungssatz von $+\pi/2 \dots +\pi$. Schließlich sind nach Ausführung dieser Rechenoperationen beide Gleichungssätze zu ad-

dieren. Auf der rechten Seite führen die so behandelten Gleichungen zu dem Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{1}{4} \cdot (\xi'_0 \eta'_0 \cdot \xi'_1 \eta'_1)^{1/2} \cdot \int_0^\pi \exp \left\{ i \cdot \frac{\cos \varphi}{2} \cdot (\xi'_0 - \eta'_0 - (\xi'_1 - \eta'_1)) \right\} \\
 & \cdot J_\mu \left(2 \sqrt{\xi'_0 \eta'_0} \cdot \frac{\sin \varphi}{2} \right) \cdot J_\mu \left(2 \sqrt{\xi'_1 \eta'_1} \cdot \frac{\sin \varphi}{2} \right) \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi \\
 & = \frac{1}{2} \cdot (\xi'_0 \eta'_0 \cdot \xi'_1 \eta'_1)^{1/2} \cdot \int_0^\pi \cos \left\{ \frac{\cos \varphi}{2} \cdot (\xi'_0 - \eta'_0 - (\xi'_1 - \eta'_1)) \right\} \\
 & \cdot J_\mu \left(2 \sqrt{\xi'_0 \eta'_0} \cdot \frac{\sin \varphi}{2} \right) \cdot J_\mu \left(2 \sqrt{\xi'_1 \eta'_1} \cdot \frac{\sin \varphi}{2} \right) \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi \\
 & = \frac{(\xi'_0 \eta'_0 \cdot \xi'_1 \eta'_1)^{\frac{1+\mu}{2}}}{2^{\mu+3/2} \cdot \Gamma(\mu + \frac{1}{2})} \cdot \int_0^\pi \frac{J_{\mu+\frac{1}{2}}(\sqrt{A-B \cdot \cos \Phi})}{(\sqrt{A-B \cdot \cos \Phi})^{\mu+\frac{1}{2}}} \cdot \sin^{2\mu} \Phi \cdot d\Phi \\
 & = \frac{(\xi'_0 \eta'_0 \cdot \xi'_1 \eta'_1)^{\frac{1+\mu}{2}}}{2^{\mu+3/2}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu)}{2\pi i} \\
 & \cdot \int_0^{(1+)} \left\{ \frac{J_{\mu+\frac{1}{2}}(\sqrt{A-B \cdot t})}{(\sqrt{A-B \cdot t})^{\mu+\frac{1}{2}}} + \frac{J_{\mu+\frac{1}{2}}(\sqrt{A+B \cdot t})}{(\sqrt{A+B \cdot t})^{\mu+\frac{1}{2}}} \right\} \cdot (t^2-1)^{\mu+\frac{1}{2}} \cdot dt
 \end{aligned}$$

mit

$$A = \left\{ \frac{1}{4} \cdot (\xi'_0 - \eta'_0 - (\xi'_1 - \eta'_1))^2 + \xi'_0 \eta'_0 + \xi'_1 \eta'_1 \right. \\
 \left. + \left(\frac{\xi'_0 - \eta'_0}{2} - \frac{\xi'_1 - \eta'_1}{2} \right)^2 + (\sqrt{\xi'_0 \eta'_0} - \sqrt{\xi'_1 \eta'_1})^2 + 2 \cdot (\xi'_0 \eta'_0 \cdot \xi'_1 \eta'_1)^{1/2} \right\}$$

$$B = 2 \cdot (\xi'_0 \eta'_0 \cdot \xi'_1 \eta'_1)^{1/2} < A \quad \text{für} \quad \xi'_0, \eta'_0 \neq \xi'_1 \eta'_1.$$

Dabei geht die dritte Form aus der ersten durch die Anwendung der bekannten Formel (1') hervor.

$$\begin{aligned}
 (1') \quad & \int_0^\pi \frac{J_\nu(\sqrt{a^2+b^2-2ab \cdot \cos \Phi})}{(a^2+b^2-2ab \cdot \cos \Phi)^{\nu/2}} \cdot \sin^{2\nu} \Phi \cdot d\Phi \\
 & = 2^\nu \cdot \Gamma(\tfrac{1}{2}) \Gamma(\nu+\tfrac{1}{2}) \cdot \frac{J_\nu(a)}{a^\nu} \cdot \frac{J_\nu(b)}{b^\nu}.
 \end{aligned}$$

Auf der linken Gleichungsseite entstehen durch die angegebenen Rechenvorschriften zunächst die folgenden beiden dreifachen Integrale:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_0^{+\pi/2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \int_{t-i\infty}^{t+i\infty} \Gamma\left(-s + \frac{1+\mu}{2}\right) \cdot \Gamma\left(+s + \frac{1+\mu}{2}\right) \cdot \Gamma\left(-t + \frac{1+\mu}{2}\right) \\
 & \cdot \Gamma\left(+t + \frac{1+\mu}{2}\right) \cdot \frac{(\operatorname{tg} \varphi/2)^{2s+2t}}{\sin \varphi} \cdot \frac{M_{x-\frac{1+\mu}{2}+s, \frac{\mu}{2}}(-i\xi'_0) \cdot M_{x-\frac{1+\mu}{2}+s, \frac{\mu}{2}}(+i\eta'_0)}{\Gamma(1+\mu) \cdot \Gamma(1+\mu)} \\
 & \cdot \frac{M_{x-\frac{1+\mu}{2}+t, \frac{\mu}{2}}(+i\xi'_1) \cdot M_{x-\frac{1+\mu}{2}+t, \frac{\mu}{2}}(-i\eta'_1)}{\Gamma(1+\mu) \cdot \Gamma(1+\mu)} \cdot dt \cdot ds \cdot d\varphi,
 \end{aligned}$$

+ einem genau ebenso aufgebauten dreifachen Integral, in dem die Integrationsgrenzen für $\varphi + \pi/2$ und $+\pi$ sind.

Da nun die beiden Integrale über s und t für reelle Werte von φ absolut und gleichmäßig konvergieren, so ist es erlaubt, die Reihenfolge der Integrationen zu vertauschen und die nach φ zuerst auszuführen. Es ist nun

$$\begin{aligned} \int \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^{2s+2t} \cdot \frac{d\varphi}{\sin \varphi} &= \int (\operatorname{tg} x)^{2s+2t-1} \cdot d(\operatorname{tg} x) \\ &= \int z^{2s+2t-1} \cdot dz = \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^{2s+2t}}{-2(s+t)}. \end{aligned}$$

Demnach ist also

$$(1a) \quad \int_0^{\pi/2} \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^{2s+2t} \cdot \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = + \frac{1}{2(s+t)} \quad \text{falls } \Re(s+t) = \sigma + \tau > 0$$

$$(1b) \quad \int_{+\pi/2}^{+\pi} \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^{2s+2t} \cdot \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = - \frac{1}{2(s+t)} \quad \text{falls } \Re(s+t) = \sigma + \tau < 0.$$

In den nach der Ausführung der Integration über φ verbleibenden beiden Doppelintegralen sind also die beiden Integrationsabszissen σ und τ innerhalb der Bedingung $|\sigma, \tau| < (1 + \Re(u))/2$ nicht mehr frei und unabhängig voneinander wählbar, sondern sie unterliegen in ihrer Größe einer Kopplung, die für die beiden Doppelintegrale verschieden aussieht. Wir machen uns zunächst die Bedeutung dieser Kopplung klar. Da es offenbar gleichgültig ist, welche von den beiden Integrationsabszissen als die unabhängig wählbare betrachtet wird, so nehmen wir hierfür die Abszisse σ . Dann ist im ersten, oben angeschriebenen Doppelintegral nach (1a) $-\sigma < \tau < (1 + \Re(u))/2$, im zweiten, nicht angeschriebenen Doppelintegral gem. (1b) $-(1 + \Re(u))/2 < \tau < -\sigma$. Deutet man diese beiden Ungleichungen in der t -Ebene geometrisch und beachtet, daß in dieser Ebene der Integrand abgesehen von den beiden Polketten, die von den Γ -Funktionen herrühren, in jedem Falle auch noch einen einfachen Pol im Punkte $t = -s$ mit der Abszisse $-\sigma$ hat, so besagen offenbar die obigen beiden Ungleichungen für τ , daß im ersten Doppelintegral der in der t -Ebene liegende Integrationsweg rechts von diesem einzelnen Pol liegt, während er im zweiten Doppelintegral links davon liegt. Um also die beiden Doppelintegrale, deren Integranden sowieso übereinstimmen, auch hinsichtlich ihrer Integrationswege in Einklang zu bringen, ist mithin lediglich erforderlich, in dem zweiten Doppelintegral den Integrationsweg in der t -Ebene nach rechts zu verschieben, bis er mit dem Integrationsweg in der t -Ebene beim ersten Doppelintegral zusammenfällt. Dabei wird dann aber der einfache Pol $t = -s$ überschritten, dessen Residuum zu dem

Wert des Doppelintegrals den Ausdruck

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{+\sigma-i\infty}^{+\sigma+i\infty} \left\{ \Gamma\left(-s + \frac{1+\mu}{2}\right) \Gamma\left(+s + \frac{1+\mu}{2}\right) \right\}^2$$

$$\cdot \frac{M_{\kappa - \frac{\mu+1}{2} + s, \frac{\mu}{2}}(-i\xi'_0) \cdot M_{\kappa - \frac{\mu+1}{2} + s, \frac{\mu}{2}}(+i\eta'_0)}{\Gamma(1+\mu) \cdot \Gamma(1+\mu)}$$

$$\cdot \frac{M_{\kappa - \frac{\mu+1}{2} - s, \frac{\mu}{2}}(+i\xi'_1) \cdot M_{\kappa - \frac{\mu+1}{2} - s, \frac{\mu}{2}}(-i\eta'_1)}{\Gamma(1+\mu) \cdot \Gamma(1+\mu)} \cdot ds$$

beisteuert. Die außerdem noch auf der linken Gleichungsseite auftretenden beiden Doppelintegrale, die nunmehr sowohl in ihren Integranden wie in ihrer Wegführung übereinstimmen, heben sich aber wegen des entgegengesetzten Vorzeichens in den Gl. (1 a, b) gegenseitig auf. Damit haben wir aber im ganzen das folgende Resultat erzielt: Es ist

$$(2) \quad \frac{1}{2} \cdot (\xi'_0 \eta'_0 \cdot \xi'_1 \eta'_1)^{1/2} \cdot \int_0^{+\pi} \exp\left\{+i \frac{\cos \varphi}{2} \cdot (\xi'_0 - \eta'_0 - (\xi'_1 - \eta'_1))\right\}$$

$$\cdot J_\mu(\sqrt{\xi'_0 \eta'_0} \cdot \sin \varphi) \cdot J_\mu(\sqrt{\xi'_1 \eta'_1} \cdot \sin \varphi) \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \left\{ \Gamma\left(-s + \frac{\mu+1}{2}\right) \Gamma\left(+s + \frac{\mu+1}{2}\right) \right\}^2$$

$$\cdot \frac{M_{\kappa - \frac{1+\mu}{2} + s, \frac{\mu}{2}}(-i\xi'_0) \cdot M_{\kappa - \frac{1+\mu}{2} + s, \frac{\mu}{2}}(+i\eta'_0)}{\Gamma(1+\mu)} \cdot \frac{M_{\kappa - \frac{1+\mu}{2} - s, \frac{\mu}{2}}(+i\xi'_1) \cdot M_{\kappa - \frac{1+\mu}{2} - s, \frac{\mu}{2}}(-i\eta'_1)}{\Gamma(1+\mu)}$$

$$\cdot \frac{M_{\kappa - \frac{1+\mu}{2} + s, \frac{\mu}{2}}(-i\xi'_0) \cdot M_{\kappa - \frac{1+\mu}{2} + s, \frac{\mu}{2}}(+i\eta'_0)}{\Gamma(1+\mu)} \cdot \frac{M_{\kappa - \frac{1+\mu}{2} - s, \frac{\mu}{2}}(+i\xi'_1) \cdot M_{\kappa - \frac{1+\mu}{2} - s, \frac{\mu}{2}}(-i\eta'_1)}{\Gamma(1+\mu)}$$

$$\left(\Re(\mu) > -1; |\sigma| < \frac{1+\Re(\mu)}{2} \right).$$

Statt des auf der linken Seite von (2) stehenden Ausdrucks kann natürlich auch irgend eine andere der in (1) angegebenen Formen stehen.

Untersucht man auf die gleiche Weise wie im vorigen Abschnitt das Verhalten des Integranden von (2) auf dem unendlich fernen Halbkreis der rechten z -Halbebene, so findet man für den Absolutbetrag des Integranden in dem Winkelbereich $|\chi| \lesssim \pi/2$ für reelle Werte von μ den asymptotischen Näherungswert:

$$(\xi'_0 \eta'_0 \xi'_1 \eta'_1)^{1/4} \cdot \exp\left\{-2\pi \cdot |s| \cdot \sin \chi + 2 \cdot \left[|s| \cdot \left| \sin\left(\frac{\chi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right| \cdot (\sqrt{\xi'_0} + \sqrt{\eta'_0}) \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left| \sin\left(\frac{\chi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| \cdot (\sqrt{\xi'_1} + \sqrt{\eta'_1}) \right] \right\}.$$

Das Integral (2) konvergiert also auf dem dafür vorgesehenen Integrationsweg wegen $\chi = \pi/2$ in der Tat absolut und gleichmäßig. Es ist aber offenbar nicht möglich, den Integrationsweg von (2) nach rechts an die positiv reelle Achse der z -Ebene heranzuführen, da die Konvergenz des Integrals für $\chi = 0$ aufhört. Damit entfällt aber auch die Möglichkeit, das Integral (2) auf dem geschilderten Wege in eine unendliche Reihe aufzulösen. Solange man also in (2) an der abschließlichen Verwendung der M -Funktion festhält, ist die Darstellung der rechten Gleichungsseite in Form eines Integrals die einzig mögliche.

Ein bemerkenswerter Sonderfall von (2) entsteht durch Nullsetzen von ξ'_1 und η'_1 , nachdem man die Gl. (2) vorher durch

$$(+i\xi'_1)^{\frac{1+\mu}{2}} \cdot (-i\eta'_1)^{\frac{1+\mu}{2}} = (\xi'_1\eta'_1)^{\frac{1+\mu}{2}}$$

dividiert hat. Dann werden nämlich die beiden letzten M -Funktionen auf der rechten Seite dieser Gleichung der Einheit gleich. Auf der linken Seite der Gleichung erhält man aber nach dem Grenzübergang

$$\begin{aligned} & 2^{\mu+1} \cdot \Gamma(1+\mu) \cdot \int_0^{+\pi} e^{i \cdot \frac{\cos \varphi}{2} (\xi'_0 - \eta'_0)} \cdot J_\mu(\sqrt{\xi'_0 \eta'_0} \cdot \sin \varphi) \cdot \sin^{\mu+1} \varphi \cdot d\varphi \\ &= \frac{(\xi'_0 \eta'_0)^{1/2}}{2^{\mu+1} \cdot \Gamma(1+\mu)} \cdot \left(\frac{4\pi}{\xi'_0 + \eta'_0} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2\sqrt{\xi'_0 \eta'_0}}{\xi'_0 + \eta'_0} \right)^\mu \cdot J_{\mu+\frac{1}{2}} \left(\frac{\xi'_0 + \eta'_0}{2} \right), \end{aligned}$$

wobei die Auswertung des Integrals mit Hilfe einer bekannten Formel aus der Theorie der Zylinderfunktionen gelingt. Im ganzen entsteht auf diese Weise die Gl. (3). Sie ist ein Sonderfall der Gl. 1. 1 (10) mit $r = 0$.

$$\begin{aligned} (3) \quad & \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \left\{ \Gamma\left(-s - \frac{\mu+1}{2}\right) \Gamma\left(+s + \frac{\mu+1}{2}\right) \right\}^2 \cdot \frac{M_{\chi - \frac{\mu+1}{2} + s, \frac{\mu}{2}}(-i\xi'_0)}{\Gamma(1-\mu)} \\ & \cdot \frac{M_{\chi - \frac{\mu+1}{2} + s, \frac{\mu}{2}}(+i\eta'_0)}{\Gamma(1+\mu)} \cdot ds \\ &= \pi^{1/2} \cdot \Gamma(1+\mu) \cdot \frac{(\xi'_0 \eta'_0)^{\frac{1+\mu}{2}}}{(\xi'_0 + \eta'_0)^{\frac{1}{2} + \mu}} \cdot J_{\frac{1}{2} + \mu} \left(\frac{\xi'_0 - \eta'_0}{2} \right) \cdot \left(\sigma < \frac{1 + \Re(\mu)}{2} \right). \end{aligned}$$

1. 3. Integrale über den vorderen Parameter bei Produkten aus M - und W -Funktionen oder von W -Funktionen allein.

Wir vervollständigen das bisher gewonnene Bild, indem wir uns auch Parameterintegrale herstellen, in denen unter dem Integralzeichen auch die Funktion $W_{\chi, \mu/2}$ vorkommt. Zu diesem Zweck gehen wir von

der Reihe 1(2) aus, und zwar wollen wir von den drei Darstellungen, die von dieser Reihe in der erwähnten Gleichung angeschrieben worden sind, zunächst der zweiten den Vorzug geben. Um den Anschluß an die bisherigen Ausführungen in diesem Kapitel zu wahren, ändern wir die frühere Bezeichnung ab und setzen $s = -i \cdot \xi'$, $t = -i \cdot \eta'$ mit $\xi', \eta' > 0$ und überdies $h = \Im g^2 \frac{\varphi}{2}$. Die Reihe lautet dann

$$(1) \quad S(\alpha, \mu; \Im g^2 \frac{\varphi}{2}; -i\xi', -i\eta') = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu+1+\lambda) \Gamma(\alpha+1+\lambda)}{\lambda!} \cdot \left(\Im g^2 \frac{\varphi}{2} \right)^{2\lambda} \\ \cdot W_{-\lambda-\frac{\mu+1}{2}, \frac{\mu}{2}}(-i\xi') \cdot \frac{M_{\lambda+\frac{\mu+1}{2}, \frac{\mu}{2}}(-i\eta')}{\Gamma(1+\mu)}.$$

Von früher her wissen wir, daß sie jedenfalls für ein $|\Im g^2 \frac{\varphi}{2}| < 1$ absolut konvergiert.

Wir verwandeln diese Reihe wie im Abschnitt 13. 1. 1 in ein Integral mit der Integrationsvariablen s' , die im wesentlichen die Stelle der bisherigen Summationsvariablen λ vertritt. Als Integrationsweg benutzen wir zunächst wieder eine Schleife, die im Punkte $\infty \cdot \text{arc}_a(0)$ beginnt, dicht oberhalb der positiv reellen s' -Achse im mathematisch positiven Sinne um den Nullpunkt herumzieht und dicht unterhalb dieses Teils der s' -Achse wieder ins Unendliche zurückläuft. Die Singularitäten des Integranden innerhalb dieser Schleife müssen durch eine eindeutige Funktion erzeugt werden, die in den Punkten $s' = 0, 1, 2 \dots$ lauter einfache Pole hat. Wir wählen dafür wiederum die Funktion $\Gamma(-s')$ und haben dann offenbar in dem Integral (2), wie die An-

$$(2) \quad S(\alpha, \mu; \Im g^2 \frac{\varphi}{2}; -i\xi', -i\eta') = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\infty \cdot \text{arc}_a(0)}^{(0+)} \Gamma(-s') \Gamma(\mu+1+s') \\ \Gamma(\alpha+1+s') \cdot \left(\Im g^2 \frac{\varphi}{2} \cdot e^{-\pi i} \right)^{s'} \cdot W_{-s'-\frac{\mu+1}{2}, \frac{\mu}{2}}(-i\xi') \cdot \frac{M_{s'+\frac{\mu+1}{2}, \frac{\mu}{2}}(-i\eta')}{\Gamma(1+\mu)} \cdot ds'$$

wendung des Residuensatzes sofort erkennen läßt, das gewünschte Äquivalent zu der Reihendarstellung (1) vor uns. Um zu erreichen, daß bei der Auflösung von (2) in eine Reihe im Pol $s' = \lambda$ nicht die Potenz $\left(\Im g^2 \frac{\varphi}{2} \right)^{\lambda}$ erscheint, sondern die Potenz $\left(+ \Im g^2 \frac{\varphi}{2} \right)^{\lambda}$, wie es die ursprüngliche Reihe verlangt, mußte im Integranden von (2) der Faktor $\exp(-\pi i s')$ eingeschaltet werden. Durch die Einschaltung des Faktors $\exp(+\pi i s')$ hätten wir dieses Ziel zwar ebenfalls erreichen können. Wie wir aber noch sehen werden, verbietet sich diese Maßnahme aus Gründen der mangelnden Konvergenz von (2) beim Öffnen des Integrationsweges.

Im Hinblick auf das spätere Gleichsetzen von α und μ und um eine mehr symmetrische Schreibweise von (2) zu erzielen, empfiehlt es sich, mittels der Gleichung $s' + (\mu + 1)/2 = s$ in (2) die neue Integrationsvariable s einzuführen. Das ergibt nach einer einfachen Umformung

$$(3) \quad S\left(\alpha, \mu; \Im g^2 \frac{\psi}{2}; -i\xi', -i\eta'\right) \cdot \left(\Im g^2 \frac{\psi}{2} \cdot e^{-\pi i}\right)^{\frac{\mu+1}{2}} \\ = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\infty \cdot \text{arc}_a(0)}^{(+(\mu+1)/2+)} \Gamma\left(s + \frac{\mu+1}{2}\right) \Gamma\left(s + \frac{\mu+1}{2}\right) \Gamma\left(s + \frac{2\alpha - \mu + 1}{2}\right) \\ \cdot \left(\Im g^2 \frac{\psi}{2} \cdot e^{-\pi i}\right)^s \cdot W_{-s, \frac{\mu}{2}}(-i\xi') \cdot \frac{M_{s, \frac{\mu}{2}}(-i\eta')}{\Gamma(1+\mu)} \cdot ds.$$

Aus den Formeln des Berichts [2] und der Beziehung

$$\Gamma\left(s + \frac{2\alpha - \mu + 1}{2}\right) \sim (2\pi)^{1/2} \cdot \exp\left\{|s| \cdot \cos \chi \cdot \ln \frac{|s|}{e} + \left(\alpha - \frac{\mu}{2}\right) \cdot \ln |s| - |s| \cdot \chi \cdot \sin \chi\right\}$$

errechnet sich dann für den Absolutbetrag des Integranden von (3) für ein im Winkelraum $|\chi| \leq \pi/2$ gegen ∞ strebendes s der asymptotische Näherungswert:

$$(3a) \quad \pi \cdot (\xi' \eta')^{1/4} \cdot |s|^{\alpha - \frac{1}{2}} \cdot \exp\left\{+2 \cdot |s| \cdot \left[\cos \chi \cdot \ln \left|\Im g^2 \frac{\psi}{2}\right| \right. \right. \\ \left. \left. - \sin \chi \cdot \arccos \left(\Im g^2 \frac{\psi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \cdot (\sin \chi' - \sin \chi)\right] - 2 \cdot \sqrt{|s|} \cdot \left[\sqrt{\xi'} \cdot \cos \left(\frac{\chi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{\eta'} \cdot \sin \left(\frac{\chi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]\right\} \quad (\mu, \alpha \text{ reell}).$$

In Übereinstimmung mit den früheren Konvergenzuntersuchungen an der Reihe (1) im Abschnitt 12. 4. 2. konvergiert also das Schleifenintegral (3), für das $\chi = 0$ zu setzen ist, ohne Einschränkung hinsichtlich ξ' und η' , solange $|\Im g^2 \frac{\psi}{2}| < 1$ ist. Für ein $|\Im g^2 \frac{\psi}{2}| = 1$ muß aber $\xi' > \eta'$ sein. Immer darf aber hierbei $\Im g^2 \frac{\psi}{2}$ auch komplexwertig sein. Wird jedoch der Integrationsweg geöffnet, so kommt es im Winkelbereich $0 < \chi \leq \pi/2$ für zunehmende Werte von $|\chi|$ und für ein $\arccos(\Im g^2 \frac{\psi}{2}) < 0$, selbst wenn $|\Im g^2 \frac{\psi}{2}| < 1$ ist, einmal zu einem Umschlag des Vorzeichens in der eckigen Klammer des Exponenten von negativen zu positiven Werten. Für $\chi = \pm \pi/2$ selbst lautet der Exponent in der Exponentialfunktion von (3a) im besonderen

$$\text{für } \chi = -\frac{\pi}{2} \quad \chi = +\frac{\pi}{2} \\ -2 \cdot |s| \cdot \left(\pi - \arccos \left(\Im g^2 \frac{\psi}{2}\right)\right) + 2 \sqrt{|s|} \eta' \quad -2 \cdot |s| \cdot \arccos \left(\Im g^2 \frac{\psi}{2}\right) - 2 \sqrt{|s|} \xi'.$$

Für einen Integrationsweg von (2) parallel zur imaginären Achse der s -Ebene müssen wir also in Rücksicht auf die Konvergenz des Integrals notwendig das Erfülltsein der Ungleichung $0 \leq \arccos \left(\Im g \frac{\psi}{2} \right) < +\pi$ fordern. Dagegen unterliegen ξ' und η' in ihrer Größe für dieses Integral keiner Beschränkung. Diese Feststellungen bleiben auch noch gültig, wenn μ und α komplexe Zahlen sind. Soll jedoch der zur imaginären Achse parallele Integrationsweg in der s -Ebene geradlinig und ohne Schleifenbildung verlaufen können, so muß außerdem $\Re(-2(\alpha - \mu + 1)/2, -(\mu + 1)/2) < -\sigma < \Re((1 + \mu)/2)$ sein.

Hätte man zwecks Wiedergabe von $(-)^i$ in (2) in dem Integranden statt $\exp(-\pi i s)$ den Faktor $\exp(+\pi i s')$ aufgenommen, so würde das zur Folge haben, daß in (3 a) in der ersten eckigen Klammer des Exponenten der Ausdruck $-\pi/2(|\sin \chi| + \sin \chi)$ stände. Der Exponent würde also jetzt lauten

$$\begin{aligned} \text{für } \chi &= -\pi/2 & 2 \cdot |s| \cdot \arccos \left(\Im g \frac{\psi}{2} \right) + 2 \sqrt{|s|} \eta' \\ \text{für } \chi &= +\pi/2 & -2 \cdot |s| \cdot \left[\pi + \arccos \left(\Im g \frac{\psi}{2} \right) \right] - 2 \sqrt{|s|} \xi' \end{aligned}$$

und damit wäre der wichtige Fall rein reeller Werte von $\Im g \frac{\psi}{2}$ aus dem Gültigkeitsbereich von (4) ausgeschlossen.

Wird demgemäß unter der Annahme, daß die eben aufgestellten Voraussetzungen erfüllt sind, der Integrationsweg in (3) bis zum Parallelverlauf mit der imaginären Achse der s -Ebene geöffnet und zugleich die Gl. 12. 4. 2(2) berücksichtigt, so haben wir jetzt die folgende vollständige Relation:

$$\begin{aligned} (4) \quad & \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma - \infty i}^{-\sigma + \infty i} \Gamma\left(-s + \frac{1+\mu}{2}\right) \Gamma\left(+s + \frac{1+\mu}{2}\right) \Gamma\left(s - \frac{2\alpha - \mu + 1}{2}\right) \\ & \cdot \left(\Im g^2 \frac{\psi}{2} \cdot e^{-\pi i s} \right)^s \cdot W_{-s, \frac{\mu}{2}} \left(i \xi' \right) \cdot \frac{M_{s, \frac{\mu}{2}}(-i \eta')}{\Gamma(1 + \mu)} \cdot ds \quad (\Re(\mu) > -1) \\ & \equiv S\left(\alpha, \mu; \Im g^2 \frac{\psi}{2}; -i \xi', -i \eta'\right) \cdot \left(\Im g^2 \frac{\psi}{2} \cdot e^{-\pi i} \right)^{\frac{1+\mu}{2}} \\ & = \left(\xi' \eta' \cdot e^{-2\pi i} \cdot \Im g^2 \frac{\psi}{2} \right)^{\frac{1+\mu}{2}} \cdot e^{+\frac{i}{2}(s' + \eta')} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\mu + 1)} \\ & \quad \cdot \int_0^{\infty \cdot i} \exp \left\{ i t \left(\xi' + \eta' \cdot \frac{\Im \sin^2 \frac{\psi}{2}}{t + \Im \cos^2 \frac{\psi}{2}} \right) \right\} \cdot t^\mu \cdot (1+t)^\alpha \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\Im \sin^2 \frac{\psi}{2}}{t + \Im \psi^2 \frac{\psi}{2}} \right)^{1+\alpha} \propto {}_1F_1 \left(\mu - \alpha; \mu + 1; -i\eta' \cdot t \cdot \frac{\Im \sin^2 \frac{\psi}{2}}{t + \Im \psi^2 \frac{\psi}{2}} \right) \cdot dt$$

$$(0 \leq \arg(\Im g \frac{\psi}{2}) < +\pi, \Re \left(-\frac{2\alpha}{2} \frac{u+1}{2}, -\frac{\mu+1}{2} \right) < -\sigma < \Re \left(\frac{1+\mu}{2} \right)).$$

Von den Sonderfällen, die die Formel (4) in sich schließt, interessiert im folgenden vornehmlich der Grenzfall $\alpha = \mu$ und $\Im g \frac{\psi}{2} = 1$ infolge eines $\psi \rightarrow \infty$. Das Integral auf der rechten Seite von (4) geht dann nach einer bekannten Formel aus der Theorie der Zylinderfunktionen über in

$$\int_0^\infty e^{it(\xi' + \eta')} \cdot [t \cdot (1+t)]^\mu \cdot dt = 2^{-2\mu-1} \cdot \int_1^\infty e^{iv \cdot \frac{\xi' + \eta'}{2}} \cdot (v^2 - 1)^\mu \cdot dv$$

$$\left(t = \frac{v-1}{2} \right)$$

$$= \frac{\pi^{1/2}}{2} \cdot \left(\frac{4}{\xi' + \eta'} \right)^{\mu + \frac{1}{2}} \cdot e^{+\pi i (\mu + 1)} \cdot \Gamma(\mu + 1) \cdot H_{\mu + \frac{1}{2}}^{(1)} \left(\frac{\xi' + \eta'}{2} \right).$$

Damit haben wir jetzt statt (4) die wesentlich einfachere Formel (5a).

$$(5a) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma - \infty i}^{-\sigma + \infty i} \Gamma \left(-s + \frac{\mu+1}{2} \right) \Gamma \left(s + \frac{\mu+1}{2} \right) \Gamma \left(s + \frac{\mu+1}{2} \right) \cdot e^{-\pi i s}$$

$$\cdot W_{-s, \frac{\mu}{2}}(-i\xi') \cdot \frac{M_{s, \frac{\mu}{2}}(-i\eta')}{\Gamma(1+\mu)} \cdot ds = \frac{1}{2} \cdot \pi^{1/2} \cdot \Gamma(1+\mu)$$

$$\cdot \frac{(\xi' \eta')^{\frac{1+\mu}{2}}}{(\xi' + \eta')^{\frac{1}{2} + \mu}} \cdot H_{\mu + \frac{1}{2}}^{(1)} \left(\frac{\xi' + \eta'}{2} \right)$$

$$\left(|\sigma| < \frac{1 + \Re(\mu)}{2}; \Re(\mu) > -1; \xi', \eta' > 0 \right).$$

Wegen der entsprechenden Formel für $H_{\mu+1/2}^{(2)}$ vergleiche man die spätere Gl. (7a, b). Wegen der Schreibweise der Gl. (4) mit zwei W-Funktionen im Integranden wird auf den Übergang von Gl. (5a) zu (5b) verwiesen.

Das Integral (5a) läßt sich noch weiter umgestalten, indem man darin die Funktion $M_{s, \mu/2}$ mit Hilfe der Gl. (2.9) von [2] durch die Summe zweier W-Funktionen ersetzt. Selbstverständlich hat man dabei in der genannten Gleichung das obere Vorzeichen zu wählen. Es wird dann gleich dem Ausdruck:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \Gamma\left(s + \frac{1+\mu}{2}\right) \cdot W_{-s, \frac{\mu}{2}}(-i\xi') \cdot W_{-s, \frac{\mu}{2}}(+i\eta') \cdot ds \\ & + e^{-\pi i \frac{1+\mu}{2}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \Gamma\left(-s + \frac{\mu+1}{2}\right) \Gamma\left(s + \frac{\mu+1}{2}\right) \cdot \\ & \quad \cdot W_{-s, \frac{\mu}{2}}(-i\xi') \cdot W_{s, \frac{\mu}{2}}(-i\eta') \cdot ds. \end{aligned}$$

An dem ersten dieser beiden Integrale fällt sofort auf, daß hierin der Integrand rechts vom Integrationswege überhaupt keine Singularitäten mehr aufweist. Sollte sich nun zeigen, daß es erlaubt ist, ohne die Konvergenz des Integrals zu gefährden, den Integrationsweg in diesem Integral beliebig weit nach rechts zu verschieben, so würde das bedeuten, daß es identisch verschwindet. Eine solche Rechtsverschiebung des Integrationsweges ist nun aber in der Tat statthaft, denn es wird z. B. bei reellen Werten von μ auf Grund nun schon häufiger zitierter Formeln der Absolutbetrag des Integranden asymptotisch gleich

$$\tau \cdot (\xi' \eta')^{1/4} \cdot |s|^{\mu + \frac{1}{2}} \cdot \begin{cases} \exp[-2\sqrt{|s|}\xi'] & \chi = +\frac{\pi}{2} \\ \exp[-2\sqrt{|s|}\eta'] & \chi = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{für} \quad \text{und } \Re(s) > -\sigma.$$

Was das zweite Integral anbetrifft, so gilt für den Absolutbetrag seines Integranden in dem abgeschlossenen Winkelbereich $|\chi| \leq \pi/2$ für ein $|s| \rightarrow \infty$ die asymptotische Darstellung:

$$\begin{aligned} (5') \quad & \pi (\xi' \eta')^{1/4} \cdot |s|^{\mu - \frac{1}{2}} \cdot \exp \left[-2\sqrt{|s|} \right. \\ & \quad \left. (-) |\eta' \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right] \chi \leq \delta \approx 0 \\ & \quad \cdot \left[\sqrt{\xi'} \cdot \cos \left(\frac{\chi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \right. \\ & \quad \left. \sqrt{\eta'} \cdot \operatorname{sgn} \chi \cdot \sin \left(\frac{\chi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \delta \leq |\chi| \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Es ist also der Exponent der hierin vorkommenden Exponentialfunktion für

$$\begin{array}{lll} \chi = 0 & \chi = +\pi/2 & \chi = -\pi/2 \\ -2\sqrt{|s|} [\sqrt{\xi'} - \sqrt{\eta'}] & -2\sqrt{|s|}\xi' & -2\sqrt{|s|}\eta'. \end{array}$$

Das Integral selbst konvergiert also für beliebige Werte von $\xi', \eta' > 0$, und es darf durch Herumlegen seines Integrationsweges an die reelle Achse in eine Reihe entwickelt werden für alle $\xi' > \eta'$. In der Gl. (5 b) haben wir damit eine der Gl. (5 a) völlig gleichwertige zweite Darstellung für die Funktion $H_{\mu+1/2}^{(1)}$ gefunden.

$$\begin{aligned}
 (5b) \quad & \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \Gamma\left(-s + \frac{\mu+1}{2}\right) \Gamma\left(+s + \frac{\mu+1}{2}\right) \\
 & \cdot W_{-s, \frac{\mu}{2}}(-i\xi') \cdot W_{+s, \frac{\mu}{2}}(-i\eta') \cdot ds \\
 & = \frac{1}{2} \cdot \pi^{1/2} \cdot \Gamma(1+\mu) \cdot \frac{(e^{+\pi i} \cdot \xi' \eta')^{\frac{1+\mu}{2}}}{(\xi' + \eta')^{\mu + \frac{1}{2}}} \cdot H_{\mu + \frac{1}{2}}^{(1)}\left(\frac{\xi' + \eta'}{2}\right) \\
 & \left(|\sigma| < \frac{1+\Re(\mu)}{2}, \quad \Re(\mu) > -1, \quad \xi', \eta' > 0\right).
 \end{aligned}$$

Die soeben vorgenommene Umgestaltung von (5a) in (5b) läßt sich offenbar auch bereits an der Gl. (4) durchführen. Die dadurch neu zustande kommende Form der Gl. (4) braucht wohl aber nicht besonders angeschrieben zu werden. Man kann zu ihr unmittelbar gelangen, indem man nicht, wie es hier geschah, von der zweiten Darstellungsform der Gl. 1.(2) ausgeht, sondern von der ersten, oder anders ausgedrückt, indem man in der dritten Darstellungsform der eben genannten Gleichung das LAGUERRE-Polynom nicht als $M_{s, \mu/2}$ -Funktion, sondern als $W_{s, \mu/2}$ -Funktion analytisch fortsetzt.

Um diese Formeln zu verallgemeinern, knüpfen wir an die Ausführungen im Abschnitt 1.2. an und verfügen darin durchweg über κ mit der Festsetzung $\kappa = (1+\mu)/2$. In der Gl. 1.2(2), die wir uns zunächst vornehmen wollen, ersetzen wir dann die M -Funktion mit dem Argument $-i \cdot \xi'$ gemäß der Gl. (2.4a) des Berichts durch die Summe zweier W -Funktionen, so daß nach der Auflösung des einen Integrals in zwei das erste die Funktion $W_{-s, \mu/2}(+i\xi')$, das zweite die Funktion $W_{s, \mu/2}(-i \cdot \xi')$ enthält. In dem zweiten Integral gehen wir dann von $+s$ zu $-s$ über. Da nun aber

$$M_{-s, \frac{\mu}{2}}(+i\eta') \equiv M_{-s, \frac{\mu}{2}}(-i\eta' \cdot e^{+\pi i}) = e^{+\frac{\pi i}{2}(1+\mu)} \cdot M_{s, \frac{\mu}{2}}(-i\eta')$$

ist, so bekommt man in Rücksicht auf die Gl. 1.1(9), nachdem man den Faktor $\exp(+\pi i r/2)$ herausgezogen und die beiden Integrale wieder zusammengefaßt hat, die Beziehung:

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \left\{ \Gamma\left(-s + \frac{\mu+1}{2}\right) \Gamma\left(+s + \frac{\mu+1}{2}\right) \right\}^2 \\
 & \cdot {}_3F_2\left(-r, r+2\mu+1, s + \frac{\mu+1}{2}; 1+\mu, 1+\mu; 1\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left[e^{+\frac{\pi i}{2}(2s-r)} \cdot \frac{W_{-\frac{\mu}{2}}(+i\xi')}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-s\right)} \cdot \frac{M_{s, \frac{\mu}{2}}(+i\eta')}{\Gamma(1+\mu)} \right. \\
& \quad \left. + e^{-\frac{\pi i}{2}(2s-r)} \cdot \frac{W_{-\frac{\mu}{2}}(-i\xi')}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-s\right)} \cdot \frac{M_{s, \frac{\mu}{2}}(-i\eta')}{\Gamma(1+\mu)} \right] \cdot ds \\
& = \pi^{1/2} \cdot \frac{r! \Gamma(2\mu+1) \Gamma(\mu+1)}{\Gamma(2\mu+r+1)} \cdot \frac{(\xi'\eta')^{\frac{1+\mu}{2}}}{(\xi'+\eta')^{\mu+\frac{1}{2}}} \cdot C_r^{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi'-\eta'}{\xi'+\eta'}\right) \cdot J_{\mu+r+\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi'+\eta'}{2}\right) \\
& \quad \left(|\sigma| < \frac{1+\Re(\mu)}{2}, \quad r = 0, 1, 2, \dots\right).
\end{aligned}$$

Wir untersuchen zunächst bei reellen Werten von μ das asymptotische Verhalten des Integranden von (1) für $s \rightarrow \infty$ in dem abgeschlossenen Winkelbereich $|\chi| \leq \pi/2$, und zwar etwa für den zweiten Bestandteil in der eckigen Klammer. Nehmen wir dabei Bezug auf die Gl. 1.1 (1 a), (8.5 a, b) des Berichts und auf die leicht herleitbare asymptotische Näherung von

$$\begin{aligned}
(6a) \quad \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-s\right)} &= \frac{\cos \pi\left(s-\frac{\mu}{2}\right)}{\pi} \cdot \Gamma\left(s+\frac{1-\mu}{2}\right) \sim (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot |s|^{-\frac{\mu}{2}} \\
&\cdot \exp\left\{|s| \cdot \cos \chi \cdot \ln \frac{\sigma}{e} + |s| \cdot |\sin \chi| \cdot [\pi - |\chi|]\right\} \left(|\chi| \leq \frac{\pi}{2}\right),
\end{aligned}$$

die nach einer schon eingangs gemachten Bemerkung mit einer unwesentlichen Einschränkung auch für $\chi = 0$ in Anspruch genommen werden darf, so findet man für den Absolutbetrag dieses Integranden den Ausdruck:

$$\begin{aligned}
(6b) \quad & (\xi' \cdot \eta')^{1/4} \cdot |s|^{\mu-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left\{+\pi \cdot |s| \cdot (\sin \chi - |\sin \chi|) \right. \\
& \quad \left. + 2 |\overline{s}| \left[|\eta'| \cdot \sin\left(\frac{\chi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - |\xi'| \cdot \cos\left(\frac{\chi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Es ist also z. B. für

$$\chi = +\pi/2 \qquad \chi = 0 \qquad \chi = -\pi/2$$

der Exponent $= -2 \left| |\overline{s}| \xi' \cdot -2^{1/2} \right| \overline{s}| \left[|\xi'| - |\eta'| \right], -2\pi \cdot |s| + 2 \sqrt{|s|} \cdot |\eta'|$.

Da sich für den ersten Bestandteil des Integranden in (6 b) nur die Vorzeichen von $\sin \chi$ und von $\pi/4$ ändern, so ist daraus zu schließen, daß der Integrand von (1) auf dem unendlich fernen Teil des zur imaginären Achse der s -Ebene parallelen Integrationsweges für alle von Null verschiedenen Werte von ξ' und η' exponentiell verschwindet,

auf den unendlich fernen Teilen eines zur positiv reellen Achse der s -Ebene parallelen Weges jedoch nur dann, wenn $\xi' > \eta'$ ist. Nur unter dieser Voraussetzung ist dann auch die Entwicklung des Integrals (1) in eine Reihe möglich.

Bevor wir jedoch diese Entwicklung tatsächlich angeben, geben wir noch einen anderen Hinweis. Gibt man in (6) der Integrationsabszisse σ im besonderen den Wert 0, zieht sodann das Integral entsprechend dem Aufbau seines Integranden in zwei einzelne Integrale auseinander und setzt in dem ersten $s = +it$, in dem zweiten $s = -it$, so wird man sofort gewahr, daß diese beiden Integrale bei reellen Werten von μ konjugiert komplexe Werte haben. Nun läßt sich aber auch die rechte Seite der Gl. (6) unter der angegebenen Bedingung über μ in zwei konjugiert komplexe Ausdrücke zerlegen, denn es haben bekanntlich bei reellen Werten von μ und x in der Relation

$$2 \cdot J_\mu(x) = H_\mu^{(1)}(x) + H_\mu^{(2)}(x)$$

die HANKELschen Funktionen ebenfalls konjugiert komplexe Werte. Diese Feststellung legt die Vermutung nahe, daß sich die konjugiert komplexen Bestandteile der beiden Gleichungsseiten einander entsprechen. Diese Vermutung trifft nun in der Tat zu, denn die bereits oben aufgestellte Gl. (6) bildet ja einen dieser beiden Bestandteile der Gl. (6) für $r = 0$, und nachdem auf diesem Wege die gegenseitig zuzuordnenden Glieder für $r = 0$ einmal bekannt sind, sind sie es auch für ein $r > 0$. Die Gl. (6) geht damit in die übersichtlichere Gl. (7a) über, in der links wie rechts jeweils die gleichangeordneten Vorzeichen zusammengehören,

$$\begin{aligned}
 (7a) \quad & \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma - \infty i}^{-\sigma + \infty i} \Gamma\left(-s + \frac{\mu+1}{2}\right) \Gamma^2\left(+s + \frac{\mu+1}{2}\right) \\
 & \cdot {}_3F_2\left(-r, r+2\mu+1, s + \frac{\mu+1}{2}; 1+\mu, 1+\mu; 1\right) \\
 & \cdot e^{\mp \pi i s} \cdot W_{-\sigma, \frac{\mu}{2}}(\mp i \xi') \cdot \frac{M_{s, \frac{\mu}{2}}(\mp i \eta')}{\Gamma(1+\mu)} \cdot ds \\
 & = \pi^{1/2} \cdot (\mp i)^r \cdot \frac{r! \Gamma(2\mu+1) \Gamma(\mu+1)}{2 \cdot \Gamma(2\mu+r+1)} \cdot \frac{(\xi' \eta')^{\frac{1+\mu}{2}}}{(\xi' + \eta')^{\mu + \frac{1}{2}}} \\
 & \cdot C_r^{\mu + \frac{1}{2}} \left(\frac{\xi' - \eta'}{\xi' + \eta'} \right) \cdot H_{\mu+r+\frac{1}{2}}^{(1)} \left(\frac{\xi' + \eta'}{2} \right) \\
 & \left(|\sigma| < \frac{1 \mp \Re(\mu)}{2}, \quad \Re(\mu) > -1, \quad \xi', \eta' > 0 \right).
 \end{aligned}$$

Es versteht sich von selbst, daß man nun in der Gl. (7 a) wie früher in der Gl. (5 a) noch daran gehen kann, auch die M -Funktionen mit dem Argument $\mp i\eta'$ aus dem Integral zu entfernen, indem man sich dabei wieder der Gl. 1. 22 (3 a) bedient. Da die in (7 a) gegenüber (5 a) zusätzlich auftretende ${}_3F_2$ -Funktion wegen ihres in s rationalen Charakters an den Konvergenzbetrachtungen im Anschluß an die Gl. (5 a) nichts ändert, so erübrigt es sich hier, diese Betrachtungen noch einmal anzustellen, und die darnach entstehende Gl. (7 b) gilt dann unter denselben Bedingungen wie die Gl. (5 b)

$$\begin{aligned}
 (7b) \quad & \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \Gamma\left(-s + \frac{\mu+1}{2}\right) \Gamma\left(+s + \frac{\mu+1}{2}\right) \\
 & \cdot {}_3F_2\left(-r, r+2\mu+1, s + \frac{1+\mu}{2}; 1+\mu, 1+\mu; 1\right) \\
 & \cdot W_{-s, \frac{\mu}{2}}(\mp i\xi') \cdot W_{s, \frac{\mu}{2}}(\mp i\eta') \cdot ds \\
 & = \pi^{1/2} \cdot (\mp i)^r \cdot \frac{r! \Gamma(2\mu+1) \Gamma(\mu+1)}{2 \cdot \Gamma(2\mu+r+1)} \cdot (e^{\pm \pi i} \cdot \frac{\xi' \eta'}{2})^{\frac{1+\mu}{2}} \\
 & \quad (\xi' + \eta')^{\mu + \frac{1}{2}} \\
 & \quad \cdot C_r^{\mu + \frac{1}{2}}\left(\frac{\xi' - \eta'}{\xi' + \eta'}\right) \cdot H_{\mu+r+\frac{1}{2}}^{(1)}\left(\frac{\xi' + \eta'}{2}\right) \\
 & \quad \left(|\sigma| < \frac{1+\Re(\mu)}{2}, \Re(\mu) > -1, \xi', \eta' > 0\right).
 \end{aligned}$$

Der Übergang zur Reihe läßt sich in (7 a, b) in so einfacher Weise vollziehen, daß es unterbleiben kann, die Reihe explizite anzuschreiben. Wir weisen lediglich noch einmal daraufhin, daß man dabei wieder die zwiefache Möglichkeit hat, den Integrationsweg entweder nach rechts von oben und unten her an die positiv reelle Achse der s -Ebene heranzuführen oder nach links an die negativ reelle s -Achse. Will man auf die zuerst genannte Art verfahren, so ist dazu erforderlich, daß $\xi' > \eta'$ ist. Bei der zweiten Art der Wegführung muß $\eta' > \xi'$ sein, denn anstatt den Weg nach links herumzulegen, kann man auch zunächst in (7 b) s durch $-s$ ersetzen und dann wieder den Weg auf die rechte Halbachse mit ihren Polen zusammenziehen. Dabei haben offenbar ξ' und η' lediglich ihre Rollen vertauscht. Außerdem kann man hier wieder von der Gl. 1. 2 (9) Gebrauch machen.

Wir gestalten in derselben Weise wie die Gl. 1. 2 (10) die Gl. 1. 2 (2) um und setzen zu diesem Zweck in dieser Gleichung zunächst einmal $z = (1+\mu)/2$. Dann lautet sie in Rücksicht auf die Gl. 1. 2 (1)

$$(8a) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \left\{ \Gamma\left(-s + \frac{1+\mu}{2}\right) \Gamma\left(+s + \frac{1+\mu}{2}\right) \right\}^2$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{M_{+s, \frac{\mu}{2}}(\mp i \xi'_0)}{\Gamma(1+\mu)} - \frac{M_{\pm s, \frac{\mu}{2}}(\pm i \eta'_0)}{\Gamma(1+\mu)} \right] \cdot \left[\frac{M_{\pm s, \frac{\mu}{2}}(\mp i \xi'_1)}{\Gamma(1+\mu)} - \frac{M_{+s, \frac{\mu}{2}}(\pm i \eta'_1)}{\Gamma(1+\mu)} \right] \cdot ds \\
&= \frac{(\xi'_0 \eta'_0 \cdot \xi'_1 \eta'_1)^{\frac{1+\mu}{2}}}{2^{\mu+\frac{1}{2}} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}+\mu)} \cdot \int_0^{+\pi} \frac{J_{\mu+\frac{1}{2}}(\sqrt{A-B \cdot \cos \Phi})}{(\sqrt{A-B \cdot \cos \Phi})^{\mu+\frac{1}{2}}} \cdot \sin^{2\mu} \Phi \cdot d\Phi \left(\begin{array}{l} \Re(\mu) > -1 \\ |\sigma| < \frac{1+\Re(\mu)}{2} \end{array} \right) \\
& A = \left(\frac{\xi'_0 - \eta'_0}{2} - \frac{\xi'_1 - \eta'_1}{2} \right)^2 + \xi'_0 \eta'_0 - \xi'_1 \eta'_1 \quad B = 2 \cdot (\xi'_0 \xi'_1 \cdot \eta'_0 \eta'_1)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Dabei gelten in jedem der in eckige Klammern eingeschlossenen Produkte aus je zwei M -Funktionen unabhängig voneinander entweder die oberen oder die unteren Vorzeichen von Parameter und Argument. Diese Tatsache ist eine unmittelbare Folge der Gl. (2. 4a, b) des Berichts. Wir nehmen für das Folgende eine Gl. (8a) an, in der alle vorderen Parameter das positive Vorzeichen haben. Dann ersetzen wir die beiden M -Funktionen mit den Argumenten $-i \xi'_0$ und $+i \eta'_0$ gemäß der Gl. (2. 9) des Berichts durch die Summe von je zwei W -Funktionen. Hat die M -Funktion das Argument $-i \cdot \xi'_0$, so wählen wir in dieser Gleichung das obere Vorzeichen, im anderen Falle das untere. Die linke Seite von (8a) nimmt darnach die Form an:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \left\{ \Gamma\left(-s + \frac{1+\mu}{2}\right) \Gamma\left(+s + \frac{1+\mu}{2}\right) \right\}^2 \cdot \frac{M_{+s, \frac{\mu}{2}}(-i \xi'_1)}{\Gamma(1+\mu)} - \frac{M_{+s, \frac{\mu}{2}}(+i \eta'_1)}{\Gamma(1+\mu)} \\
& \times \left[\frac{W_{-s, \frac{\mu}{2}}(+i \xi'_0)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} - s\right)} \cdot \frac{W_{-s, \frac{\mu}{2}}(-i \eta'_0)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} - s\right)} + \frac{W_{+s, \frac{\mu}{2}}(-i \xi'_0) \cdot W_{+s, \frac{\mu}{2}}(+i \eta'_0)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} + s\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} + s\right)} \right. \\
& \quad + e^{+\frac{\pi i}{2}(1+\mu)} \cdot \frac{W_{-s, \frac{\mu}{2}}(+i \xi'_0) \cdot W_{+s, \frac{\mu}{2}}(+i \eta'_0)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} - s\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} + s\right)} \\
& \quad \left. + e^{-\frac{\pi i}{2}(1+\mu)} \cdot \frac{W_{+s, \frac{\mu}{2}}(-i \xi'_0) \cdot W_{-s, \frac{\mu}{2}}(-i \eta'_0)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} + s\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} - s\right)} \right] \cdot ds.
\end{aligned}$$

Von den vier nach der Auflösung der eckigen Klammer hieraus entstehenden Integralen betrachten wir zunächst die beiden ersten. Ersetzt man in der zweiten von ihnen s durch $-s$ und beachtet bei den beiden M -Funktionen die im Anschluß an Gl. (8a) gemachte Bemerkung, so unterscheiden sich die beiden Integrale nur dadurch, daß die Argumente der vier parabolischen Funktionen in ihnen durchweg das entgegengesetzte Vorzeichen tragen. Im übrigen zeigen sie aber beide

die Eigenschaft, daß ihr Integrand rechts vom Integrationswege frei von Singularitäten ist. Das bringt uns sogleich wieder auf die Vermutung, daß diese Integrale verschwindende Werte haben. Der Nachweis für die Richtigkeit dieser Vermutung läßt sich ganz ebenso führen wie im Anschluß an die Gl. (5 a), so daß wir diesen Beweis hier übergehen können.

Was nun die übrigen beiden Integrale anbetrifft, so wollen wir sie, bevor wir ihre Konvergenzeigenschaften untersuchen, auf eine möglichst zweckmäßige und einprägsame Form bringen. Da in ihnen immer drei parabolische Funktionen Argumente gleichen Vorzeichens haben, während die vierte das entgegengesetzte Vorzeichen aufweist, so erscheint es als das Beste, auch bei dieser vierten Funktion das Vorzeichen des Argumentes den übrigen anzugleichen. Machen wir zu diesem Zweck bei der jeweils in Frage kommenden M-Funktion von der Relation (2. 4 a, b) des Berichtes Gebrauch, so erreichen wir damit zugleich, daß die Exponentialfaktoren $\exp(\pm \pi i (1 + \mu)/2)$ herausfallen. Demnach können wir dann jetzt die Gl. (8 a) auch in der Gestalt der Gl. (8 b) schreiben:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi i} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} \Gamma\left(-s + \frac{1+\mu}{2}\right) \Gamma\left(+s + \frac{1+\mu}{2}\right) \\
 & \cdot \left\{ W_{-s, \frac{\mu}{2}}(+i\xi'_0) \cdot W_{+s, \frac{\mu}{2}}(+i\eta'_0) \cdot \frac{M_{-s, \frac{\mu}{2}}(+i\xi'_1) \cdot M_{+s, \frac{\mu}{2}}(+i\eta'_1)}{\Gamma(1+\mu) \Gamma(1+\mu)} \right. \\
 (8b) \quad & + W_{+s, \frac{\mu}{2}}(-i\xi'_0) \cdot W_{-s, \frac{\mu}{2}}(-i\eta'_0) \cdot \frac{M_{+s, \frac{\mu}{2}}(-i\xi'_1) \cdot M_{-s, \frac{\mu}{2}}(-i\eta'_1)}{\Gamma(1+\mu) \Gamma(1+\mu)} \left. \right\} \cdot ds \\
 & = \frac{(\xi'_0 \eta'_0 \cdot \xi'_1 \eta'_1)^{\frac{1+\mu}{2}}}{2^{\mu+\frac{1}{2}} \cdot \Gamma(\mu+\frac{1}{2})} \cdot \int_0^{+\pi} \frac{1}{\mu+\frac{1}{2}} \frac{(\sqrt{A-B \cdot \cos \Phi})}{(\sqrt{A-B \cdot \cos \Phi})^{\mu+\frac{1}{2}}} \cdot \sin^{2\mu} \Phi \cdot d\Phi, \\
 & A = \left(\frac{\xi'_0 - \eta'_0}{2} - \frac{\xi'_1 - \eta'_1}{2} \right)^2 + \xi'_0 \eta'_0 - \xi'_1 \eta'_1 \quad B = 2 \cdot (\xi'_0 \eta'_0 \cdot \xi'_1 \eta'_1)^{1/4} \\
 & \left(\Re(\mu) > -1, \quad |s| < \frac{1+\Re(\mu)}{2}; \quad \xi'_0 > \xi'_1 > 0; \quad \eta'_0 > \eta'_1 > 0 \right).
 \end{aligned}$$

Ehe wir die Zusammensetzung des Integranden von (8 b) eingehender besprechen, erledigen wir zunächst die Frage nach der Konvergenz der darin eingehenden Integrale. Zieht man zur Klärung dieser Frage dazu die verschiedenen erforderlichen Formeln heran, so ergibt sich für den Absolutbetrag der beiden Integranden von (8 b) in den Halbebenen $|\chi| \geq \pi/2$ für das erste Integral der asymptotische Näherungsausdruck (8') und beim zweiten Integral der Ausdruck (8''):

$$(8') \quad \frac{1}{4} \cdot |s|^{-1} \cdot (\xi'_0 \eta'_0 \cdot \xi'_1 \eta'_1)^{1/4} \cdot \exp \left\{ -2 \cdot \sqrt{|s|} \cdot \left[\sqrt{\xi'_0} \cdot \cos \left(\frac{\chi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{\xi'_1} \cdot \left| \sin \left(\frac{\chi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right| - \sqrt{\eta'_1} \cdot \left| \sin \left(\frac{\chi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right. \right. \\ \left. \left. + \begin{pmatrix} (-) \sqrt{\eta'_0} \cdot \sin \frac{\pi}{4} \\ (+) \sqrt{\eta'_0} \cdot \sin \left(\frac{\chi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \operatorname{sgn} \chi \end{pmatrix} \right] \right\} \quad \begin{matrix} \chi \approx 0 \\ |\chi| \leq \frac{\pi}{2}, \end{matrix}$$

$$(8'') \quad \frac{1}{4} \cdot |s|^{-1} \cdot (\xi'_0 \eta'_0 \cdot \xi'_1 \eta'_1)^{1/4} \cdot \exp \left\{ -2 \cdot \sqrt{|s|} \cdot \left[\sqrt{\eta'_0} \cdot \cos \left(\frac{\chi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{\xi'_1} \cdot \left| \sin \left(\frac{\chi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right| - \sqrt{\eta'_1} \cdot \left| \sin \left(\frac{\chi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right. \right. \\ \left. \left. + \begin{pmatrix} (-) \sqrt{\xi'_0} \cdot \sin \frac{\pi}{4} \\ (+) \sqrt{\xi'_0} \cdot \sin \left(\frac{\chi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \operatorname{sgn} \chi \end{pmatrix} \right] \right\} \quad \begin{matrix} \chi \approx 0 \\ |\chi| \leq \frac{\pi}{2}, \end{matrix}$$

Im besonderen verhält sich also in beiden Integralen der Exponent

$$\begin{array}{ll} \text{für } \chi = +\pi/2 & \text{wie } -2 \sqrt{|s|} \cdot [\sqrt{\eta'_0} - \sqrt{\eta'_1}] \\ \text{für } \chi = -\pi/2 & -2 \sqrt{|s|} \cdot [\sqrt{\xi'_0} - \sqrt{\xi'_1}]. \end{array}$$

Das Integral (8 b) konvergiert also in seinen beiden Bestandteilen absolut und gleichmäßig, sobald $\eta'_0 > \eta'_1$ und $\xi'_0 > \xi'_1$ ist. Es haben also von den Argumenten der vier parabolischen Funktionen in (8 b) diejenigen das Übergewicht, die zu den W -Funktionen gehören. Ist etwa in einem anderen Falle $\eta'_0 > \eta'_1$, aber $\xi'_0 < \xi'_1$, so erhält man die zugehörige, (8 b) entsprechende Integraldarstellung, indem man in (8 a) jeweils die Funktionen $M_{\pm s, \mu/2}(\pm i \eta'_0)$ und $M_{\pm s, \mu/2}(\mp i \xi'_1)$ durch die Summe zweier W -Funktionen ersetzt. Im übrigen kann man genau so verfahren, wie es oben geschildert wurde.

Löst man die linke Seite von (8 b) in zwei einzelne Integrale auf und ersetzt in beiden Integralen s durch $+it$ mit $\sigma = 0$, so hat man es wiederum mit zwei konjugiert komplexen Integralen zu tun. Die rechte Seite von (8 b) läßt sich aber gleichfalls in zwei solche Summanden zerlegen. Wie dann die Zuordnung dieser beiden konjugiert komplexen Komponenten auf den beiden Gleichungsseiten zu erfolgen hat und daß sie überhaupt in dieser Weise vorgenommen werden darf, lehrt und bestätigt die Gl. (9), in der links wie rechts jeweils die oberen

oder die unteren Vorzeichen an Parameter und Argument zusammengehören. Im übrigen können natürlich in der ersten Zeile von Gl. (9) an Stelle der angeschriebenen Vorzeichen von s auch durchweg die entgegengesetzten stehen, da sich ja an dem Wert des Integrals nichts ändert, wenn man die Integrationsvariable s durch $-s$ ersetzt. Die vierte Zeile von Gl. (9) geht aus der zweiten durch die Anwendung der Gl. (10) und der schon früher angegebenen Formel 1.2 (1') hervor.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi i} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} \Gamma\left(-s+\frac{1+\mu}{2}\right) \Gamma\left(+s+\frac{1+\mu}{2}\right) \cdot W_{\pm s, \frac{\mu}{2}}(\mp i\xi'_0) \\
 & \quad \cdot W_{\pm s, \frac{\mu}{2}}(\mp i\xi'_1) \cdot \frac{M_{\pm s, \frac{\mu}{2}}(\mp i\xi'_1)}{\Gamma(1+\mu)} \cdot \frac{M_{\mp s, \frac{\mu}{2}}(\mp i\eta'_1)}{\Gamma(1+\mu)} \cdot ds \\
 & = \frac{(\xi'_0\eta'_0 \cdot \xi'_1\eta'_1)^{\frac{1+\mu}{2}}}{2^{\mu+\frac{1}{2}}} \int_0^{+\pi} \frac{H_{\mu+\frac{1}{2}}^{(1)}(\sqrt{A-B \cdot \cos \Phi})}{(\sqrt{A-B \cdot \cos \Phi})^{\mu+\frac{1}{2}}} \cdot \sin^{2\mu} \Phi \cdot d\Phi \\
 & \quad (\xi'_0 > \xi'_1, \eta'_0 > \eta'_1) \\
 (9) \quad & = \frac{(\xi'_0\eta'_0 \cdot \xi'_1\eta'_1)^{\frac{1+\mu}{2}}}{2^{\mu+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu)}{2\pi i}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{(1+)} \left\{ \frac{H_{\mu+\frac{1}{2}}^{(1)}(\sqrt{A-B \cdot t})}{(\sqrt{A-Bt})^{\mu+\frac{1}{2}}} + \frac{H_{\mu+\frac{1}{2}}^{(1)}(\sqrt{A+Bt})}{(\sqrt{A+Bt})^{\mu+\frac{1}{2}}} \right\} \cdot (t^2-1)^{\mu-\frac{1}{2}} \cdot dt \\
 & = \pm \frac{1}{2} \cdot (\xi'_0\eta'_0 \cdot \xi'_1\eta'_1)^{1/2} \cdot \int_0^\infty \exp\left\{-\left|\frac{\xi'_0-\eta'_0}{2} - \frac{\xi'_1-\eta'_1}{2}\right| \cdot \sqrt{t^2-1}\right\} \\
 & \quad \cdot J_\mu(\sqrt{\xi'_0\eta'_0} \cdot t) \cdot J_\mu(\sqrt{\xi'_1\eta'_1} \cdot t) \cdot \frac{t \cdot dt}{i\sqrt{t^2-1}},
 \end{aligned}$$

$$(9a) \quad A = \left\{ \left(\frac{\xi'_0-\eta'_0}{2} - \frac{\xi'_1-\eta'_1}{2} \right)^2 + (\sqrt{\xi'_0\eta'_0} - \sqrt{\xi'_1\eta'_1})^2 + 2 \cdot (\xi'_0\eta'_0 \cdot \xi'_1\eta'_1)^{1/2} \right. \\
 \left. \left(\frac{\xi'_0-\eta'_0}{2} - \frac{\xi'_1-\eta'_1}{2} \right)^2 + \xi'_0\eta'_0 + \xi'_1\eta'_1 \right\}$$

$$(9b) \quad B = 2(\xi'_0\eta'_0 \cdot \xi'_1\eta'_1)^{1/2},$$

$$(10) \quad \frac{H_{\mu+\frac{1}{2}}^{(1)}(\sqrt{a^2+b^2})}{\sqrt{a^2+b^2}^{\mu+\frac{1}{2}}} = \pm \frac{(2/\pi)^{1/2}}{b^\mu} \cdot \int_0^\infty J_\mu(bt) \cdot \frac{e^{-|a|\sqrt{t^2-1}}}{i\sqrt{t^2-1}} \cdot t^{\mu+1} \cdot dt$$

$(\Re(\mu) > -1, a, b \text{ reell, } \arccos(t-1) = \mp \pi, \arccos(t-1) = 0 \text{ für } t \rightarrow \infty).$

Läßt man in (9) $\xi'_1, \eta'_1 \rightarrow 0$ gehen, so gelangt man wieder zu der Gl. (5 b) zurück, denn es ist

$$\int_0^\pi \sin^{2\mu} \Phi \cdot d\Phi = \frac{1}{2} \cdot \pi^{1/2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu)}{\Gamma(1 + \mu)}.$$

Stehen in (9) die Größen ξ'_0, ξ'_1 usw. in einem anderen Größenverhältnis zueinander, als es die erste Gleichungszeile von (9) angibt, so ändert sich lediglich in dem oben besprochenen Sinne die Zusammensetzung des Integranden in der ersten Zeile, nicht aber die Angaben der übrigen drei Gleichungszeilen.

Was die Entwickelbarkeit von (9) in eine unendliche Reihe anbetrifft, so ist darüber alles wesentliche aus den Gl. (8') und (8'') zu ersehen, indem man darin $\chi = 0$ setzt. Demnach kann die linke Seite der Gl. 9 durch Herumlegen des Integrationsweges nach rechts in eine unendliche Reihe entwickelt werden, falls

$$\begin{array}{l} \sqrt{\eta'_0} > \sqrt{\xi'_0} + \sqrt{\xi'_1} + \sqrt{\eta'_1} \\ \sqrt{\xi'_0} > \sqrt{\eta'_0} + \sqrt{\xi'_1} + \sqrt{\eta'_1} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{oberen} \\ \text{unteren} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{bei Wahl des} \\ \text{Vorzeichens} \end{array}$$

von Gl. (9) ist. Es steht demnach stets dasjenige der vier Argumente auf der linken Seite dieser beiden Ungleichungen, das zu der Funktion $W_{-s, \mu 2}$ gehört. Was es zur Folge hat, wenn man in (9) den Integrationsweg nach links herumlegt, übersieht man wieder am besten, indem man in dem Integral s durch $-s$ ersetzt und dann wie bisher verfährt. Die Möglichkeit einer Reihenentwicklung ist nach dieser Umgestaltung auf Grund der eben aufgestellten Regel gegeben, wenn

$$\begin{array}{l} \text{oberen} \\ \text{unteren} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{bei Wahl des} \\ \text{nunmehr} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{oberen} \\ \text{unteren} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Vorzeichens} \\ \text{Vorzeichens} \end{array} \quad \begin{array}{l} \sqrt{\xi'_0} > \sqrt{\eta'_0} + \sqrt{\xi'_1} + \sqrt{\eta'_1} \\ \sqrt{\eta'_0} > \sqrt{\xi'_0} + \sqrt{\xi'_1} + \sqrt{\eta'_1} \end{array}$$

ist. Auf die explizite Wiedergabe dieser Reihen soll hier verzichtet werden.

(Eingegangen am 8. 12. 1948.)

Schrifttumsverzeichnis.

A. ERDELYI.

Math. Zeitschrift 42 (1937), 641—670.

H. BUCHHOLZ.

ZAMM 23 (1943), 47—58 und 100—118.

G. N. WATSON.

Theory of Besselfunctions, Cambridge 1922.

Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen. II.

Von

Helmut Wielandt in Mainz.

Das von SCHUR entdeckte Verfahren¹⁾ zur Untersuchung von Permutationsgruppen, welche eine reguläre Untergruppe $\mathfrak{H}$ des gleichen Grades enthalten, ist bisher nur im Fall kommutativer Gruppen $\mathfrak{H}$ angewandt worden, obwohl der Ansatz nicht auf diese beschränkt ist. Der Grund liegt darin, daß im Nichtkommutativen gewisse zusätzliche, bisher bei allen behandelten Beispielen angewendete Schlußweisen versagen. Um die Tragweite des ohne Zweifel noch entwicklungsfähigen Verfahrens zu prüfen und neue, allgemeiner anwendbare Schlußweisen zu entwickeln, wurde der einfachste nichtkommutative Typ, die Diedergruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung $n = 2z$ (definiert durch $Z^z = E$, $A^2 = E$, $AZAZ = E$) gewählt, also die allgemeinste durch zwei Elemente der Ordnung 2 erzeugbare endliche Gruppe. Die Untersuchung ließ sich in einer Weise durchführen, die weitere Klassen von auflösbaren Gruppen $\mathfrak{H}$ durchaus angreifbar erscheinen läßt, und ergab den nach den bisherigen Ergebnissen der Methode erwarteten Satz:

Satz 1. *Eine primitive Permutationsgruppe des Grades $n \geq 4$, welche eine reguläre Diedergruppe der Ordnung n enthält, ist zweifach transitiv.*

Der Beweis kann übersichtlich in der Sprache der Ringtheorie geführt werden (ohne daß deren feinere Hilfsmittel benötigt würden). Dies beruht auf der folgenden Tatsache, die als der Kern des Verfahrens von SCHUR anzusehen ist²⁾: Ist $\mathfrak{G}$ eine primitive, aber nicht zweifach transitive Permutationsgruppe des Grades n mit einer regulären Untergruppe $\mathfrak{H}$ des Grades n , so gibt es im Gruppenring von $\mathfrak{H}$ einen Teilring $\mathbb{T}$ mit den folgenden Eigenschaften: (a) $\mathbb{T}$ besitzt eine lineare Basis $\mathfrak{B}_q = \sum c_H^{(q)} H$ ($q = 1, 2, \dots, r$), in der neben $\mathfrak{B}_q$ auch stets

¹⁾ I. SCHUR, Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen. Sitzungsberichte Preuss. Akad. Wiss., Berlin 1933, phys.-math. Kl., S. 598—623. Eine elementare Darstellung gibt W. A. MANNING, On transitive groups that contain certain transitive subgroups. Bulletin Amer. math. Soc. 45 (1939), S. 783—791.

²⁾ SCHUR, § 2—3. Dort ist allerdings die Beziehung $\tau_q^* \in \mathbb{T}$ nicht hervorgehoben. Diese ergibt sich z. B. daraus, daß die Transponierte V' jeder Matrix V , die mit allen Matrizen einer gegebenen Permutationsgruppe $\mathfrak{G}$ vertauschbar ist, die gleiche Eigenschaft hat, da $\mathfrak{G}$ neben G auch stets $G' = G^{-1}$ enthält.

$\mathfrak{B}_q^* = \sum c_H^{(q)} H^{-1}$ auftritt, $c_H^{(q)}$ nur die Werte 0 und 1 annimmt und $\sum_q c_H^{(q)} = 1$ ist für jedes $H \in \mathfrak{H}$; (b) $\mathfrak{H}$ und E sind die einzigen Untergruppen von $\mathfrak{H}$, deren Elementensumme in $\mathbb{T}$ liegt; (c) es ist $r > 2$. Hiernach genügt es zum Beweis von Satz 1. zu zeigen, daß im Gruppenring der Dieder-Gruppe kein Teilring $\mathbb{T}$ mit den Eigenschaften (a)–(c) vorhanden ist. Im Hinblick auf weitere Anwendungen erscheint es zweckmäßig, zunächst bei beliebigem $\mathfrak{H}$ die Ringe $\mathbb{T}$ mit der Eigenschaft (a) zu untersuchen (*S-Ringe*⁴⁾). Wie die Zusammenstellung in Abschnitt 1 zeigt, läßt sich über sie überraschend viel aussagen.

1. S-Ringe.

$\mathfrak{H}$ sei eine abstrakte endliche Gruppe. Wir bezeichnen Teilmengen (*Komplexe*) von $\mathfrak{H}$, insbesondere Untergruppen, mit großen Frakturbuchstaben (z. B. $\mathbb{U} \subseteq \mathfrak{H}$). Elemente von $\mathfrak{H}$ mit großen lateinischen (z. B. das Einheitsselement mit E). Kleine lateinische Buchstaben bezeichnen ganze rationale Zahlen. H ist der *Gruppenring* der formalen Linearverbindungen $\alpha = \sum a_H H$, wobei H die verschiedenen Elemente von $\mathfrak{H}$ durchläuft ($H \in \mathfrak{H}$). Seine Elemente (*Größen*) werden im allgemeinen mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet; nur die *einfachen Elemente* von H , bei denen alle Koeffizienten 0 oder 1 sind, aber nicht alle 0, wollen wir auch durch den gleichen Frakturbuchstaben bezeichnen, wie den Komplex der in ihnen wirklich auftretenden Elemente von $\mathfrak{H}$ (z. B. $\sum H = \mathfrak{H}$). Die Summe $\mathfrak{A}_c$ derjenigen $H \in \mathfrak{H}$, die in α mit einem festen Koeffizienten $a_H = c$ auftreten, nennen wir den *zu c gehörigen einfachen Bestandteil* von α ; es ist $\alpha = \sum c \mathfrak{A}_c$. Ferner bezeichnen wir ständig, wenn $\alpha = \sum a_H H$ ist, $\sum a_H H^{-1} = \alpha^{*3}$; es ist $\alpha^{**} = \alpha$, $(a\alpha + b\beta)^* = a\alpha^* + b\beta^*$, $(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*$, $\alpha\alpha^* = 0$ nur für $\alpha = 0$.

Ein *S-Ring über $\mathfrak{H}$* ist nach unserer Definition eine Teilmenge des Gruppenrings H , welche (die Elementensumme von) $\mathfrak{H}$, ferner zu jedem ihrer Elemente α auch α^* und die einfachen Bestandteile von α , schließlich zu je zweien ihrer Elemente α und β auch $\alpha\beta$ und $\alpha - \beta$ enthält. Dies folgt aus (a): Ein *S-Ring* ist ein Teilring von H , der eine (dann eindeutig bestimmte) Basis aus einfachen, elementefremden Größen $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_r$ mit der Summe $\mathfrak{H}$ besitzt, unter denen neben jedem $\mathfrak{B}_q$ auch $\mathfrak{B}_q^*$ vorkommt. (Die *einfachen Basiselemente* $\mathfrak{B}_q$ ent-

³⁾ Bei Zulassung komplexer Koeffizienten a_H wäre $\alpha^* = \sum \bar{a}_H H^{-1}$ zu setzen.

⁴⁾ Dieser Begriff deckt sich im wesentlichen, aber nicht ganz, mit dem des Stammrings, wie ihn SCHUR (§ 1) eingeführt hat. Ein Stamming ist ein Ring von Matrizen, der die Einheitsmatrix enthält und eine lineare Basis $U_1, \dots, U_r$ mit der Eigenschaft besitzt, daß jedes der n^2 Matrixfelder bei genau einer Matrix U_q mit 1, bei allen anderen mit 0 besetzt ist. Abgesehen von der abstrakteren Formulierung verlangen wir an Stelle der Einheitsmatrix zu jeder Matrix die Transponierte.

sprechen den von SCHUR eingeführten primären Komplexen.) Ein S -Ring heiße *primitiv*, wenn er genau zwei verschiedene Untergruppen von $\mathfrak{S}$ enthält (d. h. die Elementensummen solcher Untergruppen; die Grenzfälle E , $\mathfrak{S}$ sind dabei zugelassen). Wir stellen einige elementare Eigenschaften von S -Ring $\mathfrak{T}$ zusammen⁵⁾.

(1.1) Ist $\alpha = \sum a_H H \in \mathfrak{T}$, $f(x)$ eine eindeutige ganzwertige Funktion, so ist auch die Größe $f[\alpha] = \sum f(a_H) H \in \mathfrak{T}$.

Denn für $\alpha = \sum c \mathfrak{A}_c$ ist $f[\alpha] = \sum f(c) \mathfrak{A}_c \in \mathfrak{T}$. — Insbesondere liegt die Summe der in α wirklich auftretenden Elemente von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{T}$.

(1.2) Ist $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}$, $\mathfrak{B} \in \mathfrak{T}$, so ist auch der Durchschnitt $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \in \mathfrak{T}$.

Denn für die (schon durch die Bezeichnung als einfach vorausgesetzten) Größen $\mathfrak{A} = \sum a_q \mathfrak{B}_q$, $\mathfrak{B} = \sum b_q \mathfrak{B}_q$ ist jedes $a_q, b_q = 0, 1$. Daher können wir schreiben $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \sum a_q b_q \mathfrak{B}_q \in \mathfrak{T}$. Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ elementefremd, so ist $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = 0$.

(1.3) Ist $\alpha \in \mathfrak{T}$, so ist auch die von den in α wirklich auftretenden Elementen von $\mathfrak{S}$ erzeugte Untergruppe $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}$.

Denn zunächst liegt die Summe σ der in α mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten auftretenden Elemente in $\mathfrak{T}$, daher wegen der Ringeigenschaft auch $\tau = \sigma + \sigma^2 + \dots + \sigma^m$, daher auch die Summe der in τ wirklich auftretenden Elemente. Diese stimmt für genügend großes m mit $\mathfrak{A}$ überein.

(1.4) Es sei $\mathfrak{A}' = \sum H' \in \mathfrak{T}$, $\mathfrak{A}'' = \sum H'' \in \mathfrak{T}$, c eine Zahl, $\mathfrak{C}$ die Summe derjenigen $H \in \mathfrak{S}$, für welche es genau c Paare H', H'' mit $H'H = H''$ gibt. Dann ist $\mathfrak{C} \in \mathfrak{T}$.

(Das Gleiche gilt für $HH' = H''$.) Denn wegen $H = H'^{-1}H''$ ist $\mathfrak{C}$ der einfache Bestandteil von $\mathfrak{A}'^* \mathfrak{A}''$ zum Koeffizienten c .

(1.5) Es sei $\alpha \in \mathfrak{T}$, $\mathfrak{C}$ die Summe der $H \in \mathfrak{S}$ mit $\alpha H = \alpha$. Dann ist $\mathfrak{C}$ eine Gruppe, $\mathfrak{C} \in \mathfrak{T}$.

(Das Gleiche gilt für $H\alpha = \alpha$.) Die Gruppeneigenschaft ist klar. Ist $\mathfrak{A}_x$ ein einfacher Bestandteil von α , $\mathfrak{C}_x$ die Summe der Lösungen von $\mathfrak{A}_x H = \mathfrak{A}_x$, so ist $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 \cap \mathfrak{C}_2 \cap \dots \in \mathfrak{T}$.

(1.6) Ist $\mathfrak{C}$ dasjenige einfache Basiselement von $\mathfrak{T}$, in welchem E auftritt, so ist $\mathfrak{C}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{S}$ und für jedes $\alpha \in \mathfrak{T}$ gilt $\mathfrak{C}\alpha = \alpha\mathfrak{C} = e\alpha$ (e = Ordnung von $\mathfrak{C}$).

Beweis. $\mathfrak{B}_e$ sei ein einfaches Basiselement von $\mathfrak{T}$. Die Summe $\mathfrak{C}_e$ der Lösungen von $H\mathfrak{B}_e = \mathfrak{B}_e$ liegt in $\mathfrak{T}$ und enthält den Summanden E , daher auch den Summanden $\mathfrak{C}$. Also ist $\mathfrak{C}\mathfrak{B}_e = e\mathfrak{B}_e$, folglich $\mathfrak{C}\alpha = e\alpha$ für alle $\alpha \in \mathfrak{T}$. Ebenso $\alpha\mathfrak{C} = e\alpha$. Die Gruppeneigenschaft folgt aus

⁵⁾ (1.1)–(1.3) sowie (1.7) rhren von SCHUR (§ 1–3) her. (1.8) ist in Teil I dieser Arbeit, Math. Zeitschr. 40 (1935), S. 582–587, für diejenigen S -Ringe bewiesen worden, die durch Einbettung von $\mathfrak{S}$ in eine Permutationsgruppe $\mathfrak{G}$ entstehen; auf die Allgemeingültigkeit hat mich Herr R. KOCHENDRFFER aufmerksam gemacht. — Zusätzlich mag erwähnt werden, daß jeder S -Ring $\mathfrak{T}$ halbeinfach ist: Aus $\alpha\mathfrak{T}\alpha = 0$ folgt $\alpha\alpha^*(\alpha\alpha^*)^* = 0$, $\alpha\alpha^* = 0$, $\alpha = 0$.

$\mathfrak{E}\mathfrak{E} = e\mathfrak{E}$. — Man kann den Satz auch so aussprechen, daß jedes einfache Basiselement von T aus vollen zweiseitigen Nebengruppen von $\mathfrak{H}$ nach $\mathfrak{E}$ besteht. — Aus (1.2) und (1.3) in Verbindung mit der Moduleigenschaft folgt, daß die in einem S -Ring enthaltenen Untergruppen von $\mathfrak{H}$ einen Verband bilden. Die kleinste unter ihnen ist $\mathfrak{E}$, die größte $\mathfrak{H}$. Primitiv sind diejenigen S -Ringe, die außer $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ keine Untergruppe von $\mathfrak{H}$ enthalten.

(1.7) *Ist T primitiv, $\alpha \in \mathsf{T}$, $\alpha \neq c\mathfrak{E}$, so erzeugen die in α auftretenden Elemente von $\mathfrak{H}$ die ganze Gruppe $\mathfrak{H}$.*

Beweis. T enthält die von den in α auftretenden Elementen erzeugte Untergruppe $\mathfrak{A}$. Ist $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{H}$, so ist wegen der Primitivität $\mathfrak{A} = \mathfrak{E}$, also enthält α nur Elemente aus $\mathfrak{E}$. Dann ist aber $\alpha = c\mathfrak{E}$, da $\mathfrak{E}$ ein einfaches Basiselement von T ist.

(1.8) *Ist T primitiv, $\alpha \in \mathsf{T}$, $\alpha \neq c\mathfrak{H}$, so folgt aus $\alpha H = \alpha$ oder $H\alpha = \alpha$: $H \in \mathfrak{E}$.*

Denn die H mit $\alpha H = \alpha$ bilden eine Gruppe $\mathfrak{C} \in \mathsf{T}$ mit $\mathfrak{C} \neq \mathfrak{H}$. — Über jeder Gruppe $\mathfrak{H}$, deren Ordnung $n > 1$ ist, gibt es mindestens einen S -Ring, welcher primitiv ist und E enthält, nämlich den Ring T_0 der Größen $\alpha = xE + y(\mathfrak{H} - E)$. Gibt es keinen weiteren, so ist nach dem erwähnten Satz von SCHUR gewiß jede primitive Permutationsgruppe $\mathfrak{G}$ des Grades n , welche eine zu $\mathfrak{H}$ isomorphe reguläre Untergruppe enthält, zweifach transitiv. (Ob die Bedingung auch notwendig ist, ist nicht bekannt.) Satz 1 ist daher in dem folgenden enthalten:

Satz 2. T sei ein E enthaltender primitiver S -Ring über der Diedergruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung $n \geq 4$. Dann ist $\mathsf{T} = \mathsf{T}_0$.

Dem Beweis dieses Satzes ist der Rest der Arbeit gewidmet.

2. Rechenregeln in T .

Der zyklische, von dem Element Z erzeugte Normalteiler der Ordnung $z = n/2$ der Diedergruppe $\mathfrak{H}$ werde mit $\mathfrak{Z}$ bezeichnet. Ist A ein nicht in $\mathfrak{Z}$ gelegenes Element von $\mathfrak{H}$, so ist $A^2 = E$, $AZA = Z^{-1}$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}A$. Jede Größe $\tau \in \mathsf{T}$ läßt sich eindeutig in einen *zyklischen Teil* τ' und einen *Restteil* τ'' zerlegen: $\tau = \tau' + \tau''$, wobei τ' und $\tau''A$ im Gruppenring von $\mathfrak{Z}$ liegen. Für das Rechnen mit diesen Bestandteilen gilt offenbar, wenn $\sigma, \tau \in \mathsf{T}$:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} (a\sigma + b\tau)' &= a\sigma' + b\tau', & (a\sigma + b\tau)'' &= a\sigma'' + b\tau'', \\ (\sigma\tau)' &= \sigma'\tau' + \sigma''\tau'', & (\sigma\tau)'' &= \sigma'\tau'' + \sigma''\tau'. \end{aligned}$$

Wir haben vorausgesetzt, daß T primitiv und $E \in \mathsf{T}$ ist. Daraus folgt nach (1.7) wegen $\mathfrak{E} = E$:

$$(2.2) \quad \text{Ist } \tau'' = 0, \text{ so ist } \tau = cE.$$

Hieraus folgern wir:

$$(2.3) \quad \text{Ist } \tau' = 0, \text{ so ist } \tau = 0.$$

Andernfalls dürften wir τ als einfach annehmen. Nach (2.1) ist $(\tau^2)'' = 0$, daher nach (2.2) $\tau^2 = cE$, also enthält τ , als einfache Größe, nur ein Element von $\mathfrak{H}$. Dieses erzeugt eine Untergruppe der Ordnung 2 von $\mathfrak{H}$, entgegen (1.7). — Da der Restteil τ'' nur Elemente der Ordnung 2 enthalten kann, ist $\tau'' = \tau^{*''}$, $(\tau - \tau^*)'' = 0$. Daher gilt $\tau - \tau^* = cE$, worin aber offenbar $c = 0$ ist:

$$(2.4) \quad \text{Es ist } \tau = \tau^*.$$

Hieraus folgt $\tau' A = A \tau'$. Da auch $\tau'(\sigma' A) = (\sigma' A) \tau'$ ist, ergibt sich:

$$(2.5) \quad \text{Es ist } \tau' \sigma'' = \sigma'' \tau'.$$

Vergleichen wir dies mit (2.1), so haben wir für $\sigma = \tau$:

$$(2.6) \quad \text{Es ist } (\tau^2)'' = 2 \tau' \tau''.$$

Trotz der Nichtkommutativität von $\mathfrak{H}$ ist $\mathbb{T}$ kommutativ:

$$(2.7) \quad \text{Es ist } \sigma \tau = \tau \sigma.$$

Denn nach (2.4) ist $\sigma \tau = (\sigma \tau)^* = \tau^* \sigma^* = \tau \sigma$.

3. Konjugierte und rationale Größen in $\mathbb{T}$.

In diesem Abschnitt sei m eine zu n teilerfremde ganze Zahl. Wäre $\mathfrak{H}$ kommutativ, so könnten wir nach SCHUR (§ 4) schließen, daß $\mathbb{T}$ neben jeder Größe $\tau = \sum a_H H$ auch $\sum a_H H^m$ enthält. Der Beweis beruht auf der Entwicklung von τ^m nach dem Polynomialsatz und fällt mit der Kommutativität von $\mathfrak{H}$. Doch läßt sich für die Diedergruppe eine verwandte Schlußweise entwickeln. Die folgende Tatsache erlaubt es, konjugierte Größen $\tau^{(m)}$ einzuführen:

(3.1) *Hat ein Element $\tau \in \mathbb{T}$ den zyklischen Teil $\tau' = \sum a_v Z^v$, so enthält $\mathbb{T}$ genau eine Größe $\tau^{(m)}$, für welche $\tau^{(m)'} = \sum a_v Z^{vm}$ gilt.*

(Es ist zu beachten, daß über die Restteile von τ und $\tau^{(m)}$ nichts ausgesagt wird.) Zum Beweis wählen wir eine Primzahl $p > 2 \max |a_v|$ aus der Restklasse $p \equiv m \pmod n$, was nach dem bekannten Satz von DIRICHLET stets möglich ist, und berechnen $\tau^p \pmod p$ nach der Binomialformel; dabei bedeutet Kongruenz zweier Größen aus $\mathbb{H}$ Kongruenz entsprechender Koeffizienten. Es wird

$$\tau^p = (\tau' + \tau'')^p \equiv \tau'^p + \tau''^p \equiv \sum a_v Z^{vp} + \tau''^p.$$

Da p ungerade ist (wie m), enthält τ''^p nur Elemente aus $3A$, also folgt

$$(3.2) \quad \tau^{p'} \equiv \sum a_v Z^{vm} \pmod p.$$

Erklären wir die Funktion $f(x)$ als den absolut kleinsten Rest von $x \pmod p$ und setzen wir $f[\tau^p] = \tau^{(m)}$, so liegt $\tau^{(m)}$ nach (1.1) in $\mathbb{T}$ und hat wegen (3.2) und der Größenbedingung für p den angegebenen zyklischen Teil. Es ist

$$(3.3) \quad \tau^{(m)} \equiv \tau^p \pmod p.$$

Daß es in T keine weitere Größe mit demselben zyklischen Teil gibt, folgt aus (2.3). Insbesondere ist $\tau^{(m)}$ von der speziellen Wahl von p unabhängig und es ist $\tau^{(-1)} = \tau^*$.

(3.4) Die Abbildung $\tau \rightarrow \tau^{(m)}$ ist ein Isomorphismus des Ringes T .

Beweis. Die Gleichung $(a\sigma + b\tau)^{(m)} = a\sigma^{(m)} + b\tau^{(m)}$ folgt daraus, daß beide Seiten denselben zyklischen Teil besitzen. Zum Beweis der Gleichung $(\sigma\tau)^{(m)} = \sigma^{(m)}\tau^{(m)}$ wählen wir die Primzahl $p \equiv m \pmod n$ größer als die maximale Differenz aller in dieser Gleichung vorkommenden Koeffizienten. Nach (3.3) wird $\pmod p$ $(\sigma\tau)^{(m)} \equiv (\sigma\tau)^p = \sigma^p\tau^p \equiv \sigma^{(m)}\tau^{(m)}$, woraus wegen der Größenbedingung für p die behauptete Gleichung folgt.

(3.5) Bilden $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_r$ die einfache Basis von T , so stimmen sie bis auf die Reihenfolge mit $\mathfrak{B}_1^{(m)}, \dots, \mathfrak{B}_r^{(m)}$ überein. $\mathfrak{B}_q$ und $\mathfrak{B}_q^{(m)}$ enthalten gleich viel Elemente von $\mathfrak{H}$.

Beweis. Im zyklischen Teil von $\mathfrak{B}_q^{(m)}$ treten nach Definition nur die Koeffizienten 0 und 1 auf; nach (1.1) und (2.3) gilt dasselbe für den Restteil, daher ist $\mathfrak{B}_q^{(m)}$ einfach. Nach (3.4) ist weiter $\Sigma \mathfrak{B}_q^{(m)} = \mathfrak{H}^{(m)} = \mathfrak{H}$, also sind die $\mathfrak{B}_q^{(m)}$ bis auf die Reihenfolge mit den $\mathfrak{B}_q$ identisch. Besteht $\mathfrak{B}_q$ aus n_q Elementen, so erhalten wir unter Berücksichtigung von $\mathfrak{B}_q = \mathfrak{B}_q^*$:

$$\mathfrak{B}_q^2 = n_q E + \Sigma c_\lambda \mathfrak{B}_\lambda, \quad \mathfrak{B}_q^{(m)2} = n_q E + \Sigma c_\lambda \mathfrak{B}_\lambda^{(m)},$$

wobei E in Σ nicht auftritt. Hiernach besteht auch $\mathfrak{B}_q^{(m)}$ aus n_q Elementen.

(3.6) Sind l und m zu n teilerfremd, so ist $\tau^{(l)(m)} = \tau^{(lm)}$. Ist $l \equiv m \pmod n$, so ist $\tau^{(l)} = \tau^{(m)}$.

Die Übereinstimmung der zyklischen Teile ist trivial, die der Restteile folgt aus (2.3). — Hiernach können wir T in Klassen konjugierter Elemente einteilen; die τ enthaltende Klasse besteht aus den endlich vielen verschiedenen unter den Konjugierten $\tau^{(m)}$, worin m alle zu n teilerfremden ganzen Zahlen durchläuft. Besteht die Klasse von τ nur aus τ allein, so heiße τ eine rationale Größe von T . Eine rationale Größe τ stimmt also mit allen ihren Konjugierten überein; dies bedeutet, daß bei der Darstellung von τ durch die einfache Basis $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_r$ konjugierte Basisgrößen denselben Koeffizienten besitzen. Bezeichnen wir die Summe der voneinander verschiedenen Konjugierten zu $\mathfrak{B}_q$ mit $\mathfrak{A}_q$ und sind $\mathfrak{A}_1 = E$, $\mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_s$ die verschiedenen unter den $\mathfrak{A}_q$, so sind diese einfach, ihre Summe ist $\mathfrak{H}$ und $\tau = \Sigma c_\sigma \mathfrak{A}_\sigma$ durchläuft genau die Gesamtheit P der rationalen Größen von T , wenn man den c_σ alle ganzzahligen Werte erteilt.

(3.7) P ist ein E enthaltender primitiver S -Ring über $\mathfrak{H}$.

Denn P ist nach (3.4) ein Ring, besitzt die einfache Basis $\mathfrak{A}_1 = E, \dots, \mathfrak{A}_s$ und enthält zu jedem Element τ auch $\tau^* = \tau$. Da $P \subseteq T$ ist und T keine von E und $\mathfrak{H}$ verschiedene Untergruppe von $\mathfrak{H}$ enthält, ist P ebenfalls primitiv.

(3.8) Ist $P = T_0$, so ist $T = T_0$.

(T_0 besteht nach Definition aus den Größen $x E + y (\mathfrak{H} - E)$.)

Beweis. Ist $P = T_0$, so ist $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{H} - E$. Enthält nun der zyklische Teil von $\mathfrak{B}_2 a$, der Restteil von $\mathfrak{B}_2 b$ Elemente und ist die Anzahl der verschiedenen Konjugierten von $\mathfrak{B}_2$ gleich k , so folgt aus (3.5): $ka = z - 1$, $kb = z$, daher $k|1$, $k = 1$, $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{H} - E$.

Wie (3.8) zeigt, können wir beim Beweis von Satz 2 weiterhin ohne Beschränkung der Allgemeinheit die zusätzliche Voraussetzung machen, daß $T = P$ ist, d. h. nur aus rationalen Größen besteht:

(3.9) Der zyklische Teil τ' eines Elements $\tau \in T$ enthält neben dem Glied aZ' stets auch die Glieder aZ'^m , wobei m die zu n teilerfremden Exponenten durchläuft.

4. Abschluß des Beweises von Satz 2.

Wir versuchen, ähnlich wie in Teil I dieser Arbeit zum Ziel zu kommen, indem wir zeigen, daß eine gewisse einfache Basisgröße von T im wesentlichen aus vollen Nebengruppen nach einer passenden Untergruppe von $\mathfrak{H}$ besteht und daraufhin $= \mathfrak{H} - E$ sein muß. Die Durchführung ist etwas verwickelt, namentlich im Falle eines geraden z . Im folgenden bedeute $\mathfrak{U} \neq E$ eine Untergruppe von $\mathfrak{B}$, u ihre Ordnung ($1 < u \leq z$). $\mathfrak{U}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{H}$. Wir nennen eine Größe α des Gruppenrings H teilbar durch $\mathfrak{U}$, in Zeichen $\mathfrak{U}|\alpha$, wenn sie aus vollen Nebengruppen nach $\mathfrak{U}$ besteht; genauer: wenn $\alpha = \mathfrak{U}\beta$ ist mit $\beta \in H$; es ist dann auch $\alpha = \beta\mathfrak{U}$.

(4.1) Ist $\tau \in T$, $\mathfrak{U}|\tau'$, so ist $\tau \in T_0$, d. h. $\tau = aE + b\mathfrak{H}$.

Beim Beweis dürfen wir offenbar u als Primzahl annehmen, außerdem können wir uns auf einfache τ beschränken (diejenigen Gruppenelemente, die in τ' mit einem festen Koeffizienten auftreten, bilden volle Nebengruppen nach $\mathfrak{U}$). Wir berechnen $\tau'' \bmod u$. Es ist $\mathfrak{U}^2 = u\mathfrak{U} \equiv 0$, also $\tau'' \equiv \tau'^u + \tau''^u \equiv \tau'^u$. Erklären wir die Funktion $f(x)$ als den absolut kleinsten Rest von $x \bmod u$ und setzen wir $f[\tau''] = \sigma$, so ist $\sigma \in T$, $\sigma'' = 0$. Nach (2.2) folgt $\sigma = cE$, also $\tau'^u \equiv cE$. Ist daher $\tau' = \Sigma' Z'$ und ist Y ein beliebiges Element $\neq E$ aus $\mathfrak{B}$, so besitzt die Gleichung $X^u = Y$, wenn überhaupt, eine durch u teilbare Anzahl von Lösungen $X = Z'$ unter den Gliedern von τ' . Da andererseits in $\mathfrak{B}$ im Ganzen nur u Lösungen existieren und diese eine Nebengruppe nach $\mathfrak{U}$ bilden, hat τ' die Gestalt $\tau' = \alpha + \beta\mathfrak{U}$, wobei α die Summe der Lösungen der Gleichung $X^u = E$ unter den Gliedern von τ' ist; sollte unter diesen ein Element der Ordnung u auftreten, so kommen nach (3.9) alle $u-1$ Elemente der Ordnung u , die in $\mathfrak{B}$ vorhanden sind, gleichzeitig vor. Hieraus folgt, daß entweder τ' oder $\tau' - E$ oder $\tau' + E$ durch $\mathfrak{U}$ teilbar ist. Da nach Voraussetzung auch τ'' durch $\mathfrak{U}$ teilbar ist, ist entweder τ oder $\tau - E$ oder $\tau + E$ durch $\mathfrak{U}$ teilbar. Diese Größe ist dann nach (1.8) von der Gestalt $d\mathfrak{H}$. Damit ist (4.1) bewiesen.

(4.2) Es sei $\mathfrak{U}_1 \tau'$ für eine einfache Größe $\tau \neq \mathfrak{H}$ aus $\mathfrak{T}$. Dann ist $u = 2$.

Beweis. τ' enthalte c , τ'' d Elemente aus $\mathfrak{H}$. Nach (2.6) ist $\tau^{2''} = 2\tau'\tau''$. Daher ist $\mathfrak{U}_1 \tau^{2''}$, also nach (4.1) $\tau^2 = aE + b\mathfrak{H}$, d. h.

$$(4.3) \quad \tau'^2 + \tau''^2 = aE + b\mathfrak{H}$$

und $2\tau'\tau'' = b\mathfrak{H}$. Ein Vergleich der Elementezahlen ergibt

$$c^2 + d^2 = a + bz, \quad 2cd = bz,$$

daher

$$(4.4) \quad a = (c-d)^2, \quad b = 2cd/z.$$

Nun vergleichen wir für ein Element $U \neq E$ aus $\mathfrak{U}$ die Koeffizienten in (4.3). Rechts ist er b . Wegen $\mathfrak{U}_1 \tau'$ ist $U\tau' = \tau'$, also kommt U in $\tau'^2 = \tau'\tau'^*$ so oft vor, als τ' Elemente enthält, d. h. mit dem Koeffizienten c ; in τ''^2 ist der Koeffizient von U jedenfalls nicht negativ. Daher ist $b \geq c$, somit nach (4.4) $d \geq z/2$. Wendet man die gleiche Betrachtung auf $\mathfrak{H} - \tau$ anstatt τ an, so ergibt sich $z - d \geq z/2$. So erhalten wir

$$(4.5) \quad d = z/2, \quad b = c$$

(die zweite Hälfte nach (4.4)). Hiermit folgt weiter aus (4.3), daß U in τ''^2 überhaupt nicht auftritt. Dies besagt, daß kein Element von $\mathfrak{H}$ gleichzeitig in τ'' und in $U\tau''$ auftritt. Da jede dieser beiden Größen die Summe von $d = z/2$ Elementen aus $\mathfrak{H}$ ist, ergibt sich

$$(4.6) \quad \tau'' + U\tau'' = \mathfrak{H}.$$

Hieraus folgt $u = 2$. Denn gäbe es in $\mathfrak{U}$ ein von E und U verschiedenes Element VU , so hätten wir entsprechend zu (4.6) die Gleichungen $\tau'' + VU\tau'' = \mathfrak{H}$, $\tau'' + V\tau'' = \mathfrak{H}$, also $VU\tau'' = V\tau''$, $U\tau'' = \tau''$, entgegen (4.6). Damit ist der Beweis von (4.2) beendet. — Für ungerade z kann nie $u = 2$ sein. Die folgende Betrachtung bezieht sich nur auf gerade z .

(4.7) Es sei $\mathfrak{U}_1$ die Untergruppe der Ordnung 2 von $\mathfrak{H}$, $\tau \neq \mathfrak{H}$ eine einfache Größe aus $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}_1 \tau'$. Dann gilt für die Anzahl c der in τ' auftretenden Elemente $c > z/3$, und es ist $z \neq 2^k$ ($k = 1, 2, \dots$).

Beweis. Da die Voraussetzungen von (4.2) erfüllt sind, können wir die Koeffizienten von E in (4.3) vergleichen: $c + d = a + b$. Berücksichtigen wir $b = c$, so folgt

$$a = d,$$

also nach (4.4) und (4.5)

$$(4.8) \quad d = (c-d)^2, \quad z = 2(c-d)^2.$$

Hieraus ergibt sich

$$c = d + (c-d) = z/2 \pm \sqrt{z/2} \geq z/2 - \sqrt{z/2}$$

und daher $c > z/3$ für $z \geq 19$. Von den Werten $z < 19$ bleiben nur 2, 8, 18 zu untersuchen, da z nach (4.8) das Doppelte einer Quadratzahl sein muß.

Im Fall $z = 18$ ist $d = 9$, $c = 9 \pm 3$, so daß es genügt, die Möglichkeit $c = 6$ zu widerlegen (für $c = 12$ geht man von τ zu $\mathfrak{H} - \tau$ über). Die sechs in τ' auftretenden Elemente von $\mathfrak{J}$ können nicht alle der Gleichung $X^6 = E$ genügen, da sonst τ' die Untergruppe der Ordnung 6 von $\mathfrak{J}$ wäre, was nach (4.2) unmöglich ist. In τ' tritt also ein Element der Ordnung 9 oder 18 auf; dann treten aber nach (3.9) alle sechs in $\mathfrak{J}$ vorhandenen Elemente dieser selben Ordnung auf, d. h. τ' besteht entweder aus den sechs Elementen der Ordnung 9 oder aus den sechs Elementen der Ordnung 18 von $\mathfrak{J}$. Aber keine dieser beiden Gesamtheiten gestattet die Multiplikation mit dem Element U der Ordnung 2, was wir vorausgesetzt hatten. Also kann der Fall $z = 18$ unter den Voraussetzungen von (4.7) nicht auftreten.

Wir haben noch zu zeigen, daß auch $z = 2^k$ nicht auftreten kann. In diesem Fall wäre nach (4.8) z eine ungerade, d eine gerade Potenz von 2:

$$(4.9) \quad d = 2^{2^l}, \quad c = 2^{2^l} \pm 2^l.$$

Wir dürfen annehmen, daß E in τ nicht auftritt (sonst gehen wir zu $\mathfrak{H} - \tau$ über). Nach (3.9) ist dann τ' die Summe verschiedener σ_q ($q = 1, 2, \dots$), wobei σ_q die Summe der Elemente der Ordnung 2^q in $\mathfrak{J}$ bezeichnet. Da σ_q genau 2^{q-1} Elemente enthält, zerfällt c in eine Reihe voneinander verschiedener Summanden der Form 2^{q-1} . Summanden $< 2^l$ können hierbei nicht auftreten, da $2^l | c$ ist. Daher ist stets $q > l$. Alle diese σ_q aber sind durch die Untergruppe $\mathfrak{U}_l$ der Ordnung 2^l von $\mathfrak{J}$ teilbar; daher ist $\mathfrak{U}_l | \tau'$. Wendet man (4.2) auf $\mathfrak{U}_l$ an, so folgt: Ordnung $\mathfrak{U}_l \leq 2$, d. h. $l \leq 1$. Der Fall $l = 0$ ist unmöglich, da dann $z = 2$, $c = 0$ sein müßte, im Widerspruch zu (2.3). Aber auch $l = 1$, d. h. $z = 8$, ist unmöglich; denn hier ist nach (4.9) $d = 4$, $2 | c$, also auch $a = 4$, $2 | b$. Nach (4.3) folgt $2 | (\tau'^2 + \tau''^2)$. Da wegen $\mathfrak{U}_1 | \tau'$ auch $2 | \tau'^2$ ist, haben wir $2 | \tau''^2$. Andererseits darf, wie unter (4.5) gezeigt wurde, das Element U der Ordnung 2 aus $\mathfrak{J}$ in τ''^2 überhaupt nicht auftreten. Schreibt man also $\tau'' = \sum' Z' A$, so müssen die vier voneinander verschiedenen Exponenten ν so beschaffen sein, daß unter ihren 16 mod 8 zu betrachtenden Differenzen jede eine gerade Anzahl von Malen und die Differenz 4 mod 8 überhaupt nicht auftritt. Man prüft leicht nach, daß diese beiden Bedingungen unverträglich sind (man kann dabei $\nu_1 = 0$ und $\nu_2 = 2$ annehmen). Damit ist (4.7) bewiesen. Wir führen nun den Beweis von Satz 2 zu Ende, zunächst für den Fall, daß z eine Potenz von 2 ist.

(4.10) Ist $z = 2^k$, so ist $T = T_0$.

Beweis. Andernfalls gäbe es eine einfache Größe $\tau \in T$, die weder E noch das Element U der Ordnung 2 aus $\mathfrak{J}$ enthält. Wegen der Rationalität bestünde τ' aus gewissen der im vorigen Beweis eingeführten Summen σ_q ($q \geq 2$) und wäre daher wie diese durch die Gruppe $E + U = \mathfrak{U}_1$ teilbar, entgegen (4.7).

(4.11) *Besitzt z einen ungeraden Primteiler, so ist $T = T_0$.*

Beweis. Wir wählen eine einfache Basisgröße τ von T derart aus, daß die in ihrem zyklischen Teil τ' auftretenden Elemente eine von E verschiedene Gruppe $\{V\}$ möglichst kleiner Ordnung v erzeugen. Diese Ordnung ist keine Potenz von 2: denn sonst wäre einerseits $v \leq z/3$ (wegen $v \nmid z$), andererseits wäre entweder τ' oder $\tau' + E$ durch $\mathfrak{U}_1$ teilbar (nach (3.9)), also wäre nach (4.7) $v > z/3$.

Sei nun p ein ungerader Primteiler von v . Verstehen wir unter $f(x)$ den absolut kleinsten Rest von $x \bmod p$ und setzen wir $f[\tau^n] = \sigma$, so treten in der zu τ'^n kongruenten Größe σ' nur Elemente aus der echten Untergruppe $\{V^n\}$ von $\{V\}$ auf. Wegen der Minimaleigenschaft von $\{V\}$ ist $\sigma' = aE$, also $\tau'^n \equiv aE \bmod p$. Hieraus folgt wie beim Beweis von (4.1), daß entweder τ' oder $\tau' - E$ oder $\tau' + E$ durch die Untergruppe der Ordnung p von $\mathfrak{B}$ teilbar ist. Die zweite Möglichkeit scheidet aus, weil E in τ nicht auftritt. Daher ist nach (4.2), weil $p > 2$ ist, entweder τ oder $\tau + E$ gleich $\mathfrak{H}$. Für eine einfache Basisgröße kommt nur der zweite Fall in Betracht. Es ist also $\tau = \mathfrak{H} - E$, $T = T_0$.

(Eingegangen am 18. Mai 1949.)

Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn J. Heinhold.

Von

Rudolf Steuerwald in München.

§ 1.

Einleitung.

Diese Notiz bezieht sich auf die Abhandlung: J. HEINHOLD, Verallgemeinerung und Verschärfung eines MINKOWSKISCHEN Satzes. Math. Zeitschr. 1939, Bd. 44, Heft 5, S. 659—688 (zitiert: „H.“). Aus dieser werden nachstehende Vereinbarungen, Definitionen und Ergebnisse hier benützt.

Alle vorkommenden Zahlen sind reell. „Ganze“ Zahlen bedeuten ganze rationale Zahlen. Kongruenzen ohne Angabe eines Moduls sind stets solche nach dem Modul 1.

Unter Zugrundelegung einer binären quadratischen Form $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ bedeute $\varphi = \varphi(a, b, c)$ die untere Grenze aller C^2 mit der folgenden Eigenschaft: Zu zwei beliebigen Zahlen μ, ν gibt es immer kongruente Zahlen $x \equiv \mu, y \equiv \nu$, so daß $|f(x, y)| \leq C^2$. Wird die untere Grenze φ von den C^2 angenommen, so soll sie mit φ_1 bezeichnet werden. In diesem Falle gibt es zu beliebigen μ, ν stets $x \equiv \mu, y \equiv \nu$, so daß $|f(x, y)| \leq \varphi_1$. Paare μ, ν , für die hierbei das Gleichheitszeichen notwendig ist, werden mit μ_1, ν_1 bezeichnet. Solche sind im Falle $\varphi = \varphi_1$ stets vorhanden.

Für semidefinite (H. § 1) und definite (H. § 2) Formen läßt sich φ bestimmen. Für jede indefinite Form (H. § 3) läßt sich wenigstens eine obere Schranke $s(a, b, c) \geq \varphi(a, b, c)$ angeben, und dazu ein oder mehrere Zahlenpaare x, y — diese sollen hier mit x_1, y_1 bezeichnet werden —, welche folgendes leisten: erstens ist $f(x_1, y_1) = s$, und zweitens befinden sich, wenn $s = \varphi_1$ ist, die zu f gehörigen Paare μ_1, ν_1 unter den Paaren $\mu \equiv x_1, \nu \equiv y_1$. Demnach ist dann und nur dann $s > \varphi$, wenn es zu jedem der Funktion f zugeordneten Paar x_1, y_1 ein Paar $x \equiv x_1, y \equiv y_1$ gibt, für welches $|f(x, y)| < s$ ist. Wo ein solches Paar x, y existiert, soll es künftig mit x_2, y_2 bezeichnet werden.

Hier interessieren nur die auf zwei spezielle Formen bezüglichen Ergebnisse von H. § 3 E, S. 680 ff., die daher nachstehend zusammengefaßt werden. Dabei wird aus Symmetriegründen in der Bezeichnungs-

weise etwas von H. abgewichen.¹⁾ Aber hier wie dort bedeuten p und q ganze Zahlen.

$$\text{I. } f_I(x, y) = x^2 - Dy^2 \quad (D \text{ natürliche Zahl})$$

D	s	x_1	y_1
$q^2 + p$ $1 \leq p \leq q$	$\frac{2q+1-p}{4}$	$\frac{q+1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$q^2 - p$ $0 \leq p \leq q-1$	$\frac{2q-1-p}{4}$	$\frac{q-1}{2}$ $\frac{1}{2}$ dazu $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ 0 für $p=0, q=1$

$$\text{II. } f_{II}(x, y) = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - D\left(\frac{y}{2}\right)^2 \quad (D = 4k+1, k \text{ natürliche Zahl})$$

D	s	x_1	y_1
$(2q-1)^2 + 4p$ $1 \leq p \leq q$	$\frac{2q-p}{4}$	$\frac{q}{2}$	$\frac{1}{2}$
		dazu $\frac{q-1}{2}$	$\frac{1}{2}$ für $p=q$
		ferner $\frac{1}{2}$	0 für $p=q=1$
$(2q+1)^2 - 4p$ $0 \leq p \leq q-1$	$\frac{2q-p}{4}$	$\frac{q-1}{2}$	$\frac{1}{2}$

In beiden Fällen kommt jede zulässige Zahl D genau einmal vor.

In den auf diese beiden Formen bezüglichen Tabellen (H. S. 683/684) finden sich Werte von D , für welche nicht entschieden wird, ob $s = \varphi_1$ oder $s > \varphi$ ist. Diese Frage soll hier nach einer kurzen Vorbereitung (§ 2) für f_I und gewisse D , darunter alle in der Tabelle unerledigten (§ 3), sodann für f_{II} und alle D (§ 4) beantwortet werden.

§ 2.

Ein Hilfssatz.

In dem folgenden Satz und seinem Beweis sind entweder überall die oberen oder überall die unteren Vorzeichen zu nehmen.

¹⁾ Vgl. H. S. 681, (17) bis (20). Um von den dortigen zu unseren Bezeichnungen zu gelangen, setze man

$$\begin{array}{ll} \text{in (17)} & p=p', q=q' \quad \text{in (18)} \quad 2q+1-p=p', \quad q+1=q' \\ \text{in (19)} & p=p', q+1=q' \quad \text{in (20)} \quad 2q+2-p=p', \quad q+1=q' \end{array}$$

und lasse dann die Akzente wieder weg.

Satz 1. Sind p, q, r, u, v, w ganze Zahlen, welche den Bedingungen

$$p \geq 1, \quad r \geq \frac{3}{2} \mp \frac{1}{2}, \quad q = pr,$$

$$v \neq 0, \quad (u, v) = 1, \quad |w| < 2q \pm 1 - p,$$

$$u^2 - Dv^2 = w \quad \text{mit} \quad D = q^2 \pm p$$

genügen, so ist $w = \mp p$ oder $w = 1$.

Beweis. Es sei u, v, w ein Zahlentripel, das bei festem p und r den Voraussetzungen genügt. Dann gilt

$$(1) \quad (q-1)^2 v^2 < (D - |w|) v^2 \leq u^2 \leq (D + |w|) v^2 < (q+1)^2 v^2,$$

also $u \neq 0$. Man darf daher o. B. d. A. $u > 0, v > 0$ voraussetzen. Unter allen positiven Paaren u, v , welche bei festem p, r, w die Voraussetzungen erfüllen, sei u_0, v_0 das kleinste. Wegen (1) darf man schreiben

$$u_0 = qv_0 + t_0 \quad (|t_0| < v_0).$$

Ist $t_0 = 0$, so folgt $u_0 = q, v_0 = 1, w = \mp p$.

Ist $t_0 \neq 0$, so setzen wir

$$|v_0 \mp rt_0| = u_1, \quad |t_0| = v_1,$$

und verifizieren

$$pu_1^2 - (pr^2 \pm 1)v_1^2 = \mp w, \quad (u_1, v_1) = 1.$$

Ähnlich wie in (1) schließt man hieraus

$$u_1 = rv_1 + t_1 \quad (|t_1| < v_1).$$

Ist $t_1 = 0$, so folgt $u_1 = r, v_1 = 1, w = 1$.

Ist $t_1 \neq 0$, so setzen wir

$$|v_1 \mp qt_1| = u_2, \quad |t_1| = v_2,$$

und verifizieren

$$u_2^2 - Dv_2^2 = w, \quad (u_2, v_2) = 1.$$

Dabei ist $0 < v_2 < v_1 < v_0$ und damit auch $0 < u_2 < u_0$. Dies widerspricht aber der über u_0, v_0 gemachten Minimumsannahme.

Außer diesem Hilfssatz wird gelegentlich nur noch einiges aus O. PERRON, Die Lehre von den Kettenbrüchen, 2. Aufl. Teubner 1929 (zitiert „P.“) herangezogen.

§ 3.

Die Form $f_I(x, y) = x^2 - Dy^2$ (D natürliche Zahl).

Tabelle 1 (H. S. 683) ist folgendermaßen zu ergänzen bzw. (für $D = 23$) zu berichtigen. Wie bei H. stehen dabei die Paare x_1, y_1 in runden, x_2, y_2 in eckigen Klammern.

D	s	$(x_1; y_1)$	$[x_2; y_2]$
23	$\frac{7}{4} > \varphi$	$\left(\frac{2}{2}; \frac{1}{2}\right)$	$\left[\frac{12}{2}; \frac{5}{2}\right]$
34	$\frac{9}{4} = \varphi_1$	$\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$	
43	$\frac{7}{4} > \varphi$	$\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$	$\left[\frac{200}{2}; \frac{61}{2}\right]$
55	$\frac{9}{4} = \varphi_1$	$\left(\frac{4}{2}; \frac{1}{2}\right)$	
82	$\frac{9}{2} = \varphi_1$	$\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$	
94	$\frac{13}{4} > \varphi$	$\left(\frac{9}{2}; \frac{1}{2}\right)$	$\left[\frac{29}{2}; \frac{3}{2}\right]$

Die Paare x_2, y_2 wurden durch Entwicklung von $\sqrt{D}$ in einen regelmäßigen Kettenbruch gewonnen (Vgl. P. S. 102, Gl. (4)).

Bei $D = 55$ schließt man so: Zu zeigen ist, daß die Ungleichung

$$\left| (X+4)^2 - 55 \left(Y + \frac{1}{2} \right)^2 \right| < \frac{9}{4}$$

nicht in ganzen Zahlen X, Y lösbar ist. Mittels

$$2X + 8 = u, \quad 2Y + 1 = v$$

geht diese Behauptung über in die folgende: Die Gleichung

$$(2) \quad u^2 - 55v^2 = w$$

hat keine ganzzahligen Lösungen u, v, w , für welche gleichzeitig

$$(3) \quad u \equiv 0 \pmod{2}, \quad v \equiv 1 \pmod{2}, \quad |w| < 9$$

ist. Nun sind die aus (2) und (3) fließenden Forderungen

$$|w| < 9, \quad w \equiv u^2 \pmod{55}, \quad w \equiv 1 \pmod{4}$$

nur für $w = 1$ und $w = 5$ gleichzeitig erfüllt. Aber die Gleichungen $u^2 - 55v^2 = 1$ und $u^2 - 55v^2 = 5$ haben nur solche Lösungen, bei denen u ungerade und v gerade ist, da alle Näherungsbrüche des regelmäßigen Kettenbruches für $\sqrt{55}$ ungerade Zähler haben (vgl. P. S. 102/103).

$D = 34$ und $D = 82$ aber werden miteinfaßt von allgemeineren Regeln, die jetzt bewiesen werden sollen. Sie lauten:

A. Für folgende Werte von D ist $s(1, 0, -D) = \varphi_1(1, 0, -D)$:

$$1) \quad D = q^2 \quad (q \geq 1)$$

$$2) \quad D = q^2 + p \quad (p \geq 1, \quad r \geq 1, \quad q = pr)$$

$$3) \quad D = q^2 - p \quad (p \geq 1, \quad r \geq 2, \quad q = pr).$$

B. Für folgende Werte von D ist $s(1, 0, -D) > \varphi(1, 0, -D)$:

- 1) $D = q^2 + p$
 - 2) $D = q^2 - p$
- ($p = 4m + 2, q = 2n + 1, 0 \leq m \leq \sqrt{n} - 1$).

Dabei bedeuten p, q, r, m, n ganze Zahlen.

Beweis. A 1) ist schon durch H. erledigt (vgl. (21), S. 682, wo für $D = 1$ noch $\mu_1 \equiv \frac{1}{2}, \nu_1 \equiv 0$ anzufügen wäre).

A 2) und A 3) lassen sich gemeinsam behandeln (obere Vorzeichen 2), untere 3)). Zu zeigen ist: die Ungleichung

$$\left| \left(X + \frac{q \pm 1}{2} \right)^2 - (q^2 \pm p) \left(Y + \frac{1}{2} \right)^2 \right| < \frac{2q \pm 1 - p}{4}$$

ist nicht in ganzen Zahlen X, Y lösbar. Setzt man

$$2X + q \pm 1 = u, \quad 2Y + 1 = v,$$

so geht diese Behauptung in folgende gleichwertige über: Die Gleichung

$$(4) \quad u^2 - (q^2 \pm p)v^2 = w$$

hat keine ganzzahligen Lösungen u, v, w , welche den Nebenbedingungen

$$(5) \quad u \equiv q \pm 1 \pmod{2}, \quad v \equiv 1 \pmod{2}, \quad |w| < 2q \pm 1 - p$$

genügen.

Gäbe es ein solches Tripel, so müßte zunächst wegen (5) $v \neq 0$ sein. Wäre $(u, v) = d$, so würden auch die Zahlen

$$u' = \frac{u}{d}, \quad v' = \frac{v}{d}, \quad w' = \frac{w}{d^2} \quad (u', v') = 1$$

allen Anforderungen genügen, da $d \equiv v \equiv 1 \pmod{2}$ ist. Nach Satz 1 kämen daher für w' nur die Werte $\mp p$ und 1 in Frage. Aber einerseits folgt aus (4) und (5)

$$w' \equiv w \equiv 2q \pm 1 - p \not\equiv \mp p \pmod{2},$$

andererseits hat die Gleichung (4) mit $v = 1$ die „Fundamentallösung“ $u_0 = 2qr \pm 1, v_0 = 2r$, so daß auch in allen ihren anderen Lösungspaaren u, v die Zahl v gerade wird (vgl. P. S. 99, zweites Beispiel mit $b_0 = q$ und $m = p$; S. 100, viertes Beispiel mit $b_0 = q - 1, b_1 = 1, b_2 = 2r - 2$ und $m = p + 2r - 3$). Damit ist A vollständig bewiesen.

Auch die beiden Fälle B lassen sich zusammen erledigen (obere Vorzeichen 1), untere 2)). Es genügt, zu

$$x_1 = \frac{q \pm 1}{2}, \quad y_1 = \frac{1}{2}$$

ein kongruentes Paar x_2, y_2 anzugeben. Ein solches ist

$$x_2 = \frac{2q^2 \pm p}{4}, \quad y_2 = \frac{q}{2}.$$

Man errechnet nämlich

$$4|f_I(x_2, y_2)| = \frac{p^2}{4} = 4(m+1)^2 - 4(m+1) + 1 \leq 4n - 4m - 3 < 4n - 4m \pm 1 \\ = 2q \pm 1 - p = 4s.$$

Wie angekündigt, fällt

$$D = 34 = 6^2 - 2 \text{ unter A 3),} \\ \text{und } D = 82 = 9^2 + 1 \text{ unter A 2).}$$

§ 4.

$$\text{Die Form } f_{II}(x, y) = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - D\left(\frac{y}{2}\right)^2 \\ (D = 4k + 1, k \text{ natürliche Zahl}).$$

Hier ist es zweckmäßig, drei Fälle zu unterscheiden:

$$\text{a) } D = (2q - 1)^2 + 4p \quad (1 \leq p \leq q - 1)$$

$$\text{b) } D = 4q^2 + 1 \quad (q \geq 1)$$

$$\text{c) } D = (2q + 1)^2 - 4p \quad (0 \leq p \leq q - 1).$$

Dann reduziert sich die Tabelle 2 (H. S. 684), wenn man von der Klassenzahl absieht, auf drei Zeilen, nämlich

Fall	s	$(x_1; y_1)$	$[x_2; y_2]$
a)	$\frac{2q-p}{4} > \varphi$	$\left(\frac{q}{2}; \frac{1}{2}\right)$	$\left[\frac{q}{2}; -\frac{1}{2}\right]$
b)	$\frac{q}{4} = \varphi_1$	$\left(\frac{q}{2}; \frac{1}{2}\right)$ und $\left(\frac{q-1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ dazu $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ für $q = 1$	
c)	$\frac{2q-p}{4} > \varphi$	$\left(\frac{q-1}{2}; \frac{1}{2}\right)$	$\left[\frac{q+1}{2}; -\frac{1}{2}\right]$

In der Tat ist in den Fällen a) und c)

$$4|f_{II}(x_2, y_2)| = p < 2q - p = 4s.$$

Von Fall b) ist $q = 1$ ($D = 5$) schon bei H. (S. 685) erledigt. Für $q > 1$ ist zu zeigen: Keine der Ungleichungen

$$\left| \left(X + \frac{z_j}{2} + \frac{1}{2} \left(Y + \frac{1}{2}\right)\right)^2 - \frac{4q^2 + 1}{4} \left(Y + \frac{1}{2}\right)^2 \right| < \frac{q}{4} \quad (j = 1, 2),$$

wo $z_1 = q$, $z_2 = q - 1$ zu setzen ist, hat ein ganzzahliges Lösungspaar X, Y . Indem man beide Seiten mit 16 multipliziert, überzeugt man sich, daß folgende Behauptung die beiden vorhergehenden umfaßt.

Die Gleichung

$$(6) \quad u^2 - Dv^2 = w \quad (D = 4q^2 + 1)$$

mit den Nebenbedingungen

$$(7) \quad u \equiv v \equiv 1 \pmod{2}, \quad |w| < 4q$$

ist in ganzen Zahlen u, v, w unlösbar.

Gäbe es nun ein Lösungstriplet u, v, w , so könnte man wie in § 3 auch ein Lösungstriplet u', v', w' mit $(u', v') = 1$ und $w' \equiv u \equiv 0 \pmod{4}$ finden, während doch nach Satz 1 (wo q durch $2q$, p durch 1 zu ersetzen ist), $w' = \pm 1$ sein müßte. Widerspruch! Also ist im Falle b) wirklich $s = \frac{q}{4} = \varphi_1$.

Daraus folgt aber mittels der bei H. S. 686/687 angestellten Überlegungen der

Satz 2. *Ist q eine natürliche Zahl > 3 und $D = 4q^2 + 1$ quadratfrei, so existiert in dem quadratischen Zahlkörper $\mathbb{K}(\sqrt{D})$ kein Euklidischer Algorithmus.*

(Eingegangen am 25. Juni 1949.)

Über die Flächen, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören*).

Herrn Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. G. Faber zum 70. Geburtstage (5. IV. 1947) gewidmet.

Von

Karl Strubecker in Karlsruhe.

Einleitung.

Die Flächen Φ , deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören, haben eine längere Forschungsgeschichte hinter sich, die im Jahre 1882 mit dem Namen von Sophus LIE¹⁾ und der Entdeckung der nach LIE benannten, mit jedem Flächenpunkte projektiv verbundenen Quadrik beginnt. LIE stellt, gestützt auf die Existenz dieser Quadrik der Schmieg tangentes, fest, daß die Gewinde (= linearen Komplexe), in denen die Asymptotenlinien der beiden (verschiedenen) Scharen einer Fläche Φ liegen sollen, notwendig involutorischen Gewindebündeln angehören müssen, und erwähnt, daß diese involutorische Lage der Gewinde für die Flächen auch hinreichend ist.²⁾ Aber erst ein Schüler von LIE, nämlich A. PETER, gab zwölf Jahre später in seiner Leipziger Dissertation³⁾ strenge Beweise dieser LIEschen Sätze und erstmalig auch eine genaue Klassifikation der Flächen Φ . Entsprechend den drei verschiedenen Arten involutorischer Gewindebündel stieß PETER auf drei Klassen von Flächen Φ , die wir in Hinkunft durch Φ_I , Φ_{II} , Φ_{III} bezeichnen wollen. A. PETER gibt (nach bequemen projektiven Normierungen) die zum Teile schon bei LIE auftretenden MONGE-AMPERESchen Differentialgleichungen zweiter Ordnung dieser Flächenklassen an, und zeigt, wie mit Hilfe LIEScher Methoden die Integration dieser Gleichungen durch algebraische Operationen und eine Quadratur geleistet werden kann.

Mit wesentlich weniger Aufwand an Rechnung gelangt 1911 E. KERAVAL⁴⁾ durch Benutzung der LELIEUVRESchen Formeln zu einer äquivalenten Dreiteilung.

*) Anmerkung der Schriftleitung. Über die Ergebnisse dieser Arbeit hat der Verfasser schon auf der Mathematiker-Tagung in Tübingen am 26. September 1946 vorgetragen (vgl. S. 136—139 des Berichtes über diese Tagung, Tübingen 1946). Aus äußeren Gründen wurde die Arbeit erst jetzt der Schriftleitung zur Veröffentlichung übergeben.

Ch. T. SULLIVAN⁵⁾, ein Schüler von E. J. WILCZINSKI, versuchte als erster eine Konstruktion der Flächen Φ anzugeben, die wir freilich heute als rein theoretisch und reichlich kompliziert bezeichnen müssen.

Einen wesentlichen Fortschritt bringt gegenüber allen aufgezählten Arbeiten erst eine Untersuchung von A. TERRACINI⁶⁾ aus dem Jahre 1919/20. TERRACINI zeigt, daß die Flächen Φ_I der ersten Klasse als die zweiten Mäntel der Brennflächen einer W -Kongruenz aufgefaßt werden können, deren erster Mantel eine reguläre Quadrik ist. Ähnliches gilt dann auch für die beiden Grenzfälle Φ_{II} und Φ_{III} der Flächen Φ_I . Aus dieser Auffassung fließt erstens eine geometrisch wenigstens übersehbare Konstruktion der Flächen Φ und zweitens (wieder nach bequemen komplex-projektiven Normierungen) auch eine explizite und sogar integralfreie analytische Darstellung aller Flächen Φ .

Daß die geometrischen Verhältnisse aber noch wesentlich einfacher liegen, erkannten, allerdings nur für die Flächen Φ_I , G. FUBINI und A. TERRACINI⁷⁾ im Jahre 1927, indem sie zeigten, daß diese Flächen Φ_I projektiv identisch sind mit den Flächen verschwindender Absolutkrümmung des elliptischen Raumes, deren Entdeckung 1896 L. BIANCHI⁸⁾ geglückt war. Für die Flächen Φ_{II} und Φ_{III} gelang es aber nicht, zu einer ähnlichen einfachen Definition vorzudringen. Mit einer solchen wäre zugleich auch eine sehr einfache geometrische Erzeugungsweise gefunden; denn man weiß, daß die BIANCHISCHEN Flächen und damit auch die Flächen Φ_I im elliptischen Raume mit Hilfe seiner CLIFFORDschen Schiebungen als Schiebflächen ihrer Asymptotenlinien erzeugt werden können⁸⁾.

Die Lücke, die damit zur Vollendung der Theorie der Flächen Φ , deren Asymptotenlinien zur Gänze in linearen Komplexen liegen, geblieben ist, kann man tatsächlich erst auf Grund der geometrischen Entwicklung der letzten Jahre sachgemäß schließen. Es bedarf dazu nämlich zweier Grenzfälle der Differentialgeometrie des elliptischen Raumes: erstens der Differentialgeometrie des quasi-elliptischen Raumes, deren Entwicklung man W. BLASCHKE⁹⁾ verdankt, und zweitens der Differentialgeometrie des isotropen Raumes, der ich selber einige Arbeiten¹⁰⁾ gewidmet habe.

Die vorliegende Note soll nun zeigen, wie es heute unter wesentlicher Heranziehung der Geometrien des elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raumes möglich ist, die Theorie der Flächen Φ , deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören, in einer vollkommen einheitlichen Weise zu entwickeln, insbesondere zu einer einheitlichen geometrischen Konstruktion und zu einer einheitlichen expliziten (integrallosen) analytischen Darstellung dieser Flächen vorzudringen. Die einfachen Ergebnisse, zu denen wir dabei gelangen werden, habe ich schon im Jahre 1941 in einer vorläufigen Mitteilung¹¹⁾ zusammengefaßt.

Unsere Überlegungen werden rein geometrischer Art sein. Wir stützen sie analytisch hauptsächlich dort, wo es manchem Leser angenehm sein wird, „infinitesimalen“ geometrischen Überlegungen den Nachdruck analytischer Bestätigung und Gewißheit zu verleihen. Es wird sich dabei immer nur darum handeln, einzusehen, daß gewisse Bedingungen auch dann noch erfüllt sind, wenn die auftretenden Reihenentwicklungen bis zu den Gliedern 1. Ordnung vorwärtsgetrieben werden.

Inhaltsverzeichnis.

I. Allgemeine projektive Eigenschaften der Flächen Φ	403—412
1. Die längs der Asymptotenlinien berührenden Netzflächen N aus Schmiegtangenten. — 2. Projektive Äquivalenz der Asymptotenlinien jeder Schar. Erzeugung der Flächen Φ durch windschiefe Schiebungen ihrer Asymptotenlinien aneinander. — 3. Die Mannigfaltigkeit der Schiebungsachsen (Leitgeraden der berührenden Netzflächen N) kann drei Klassen angehören; dementsprechend existieren auch drei Klassen von Flächen Φ .	
II. Gemeinsame metrische Eigenschaften der Flächen Φ_I , Φ_{II} und Φ_{III} im elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raume	412—424
4. Heranziehung der Metrik des elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raumes. — 5. Die Flächen Φ_I , Φ_{II} und Φ_{III} als Flächen der festen Relativkrümmung $K = -1$ des elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raumes. Ihre Erzeugung als CLIFFORDsche Schiebflächen dieser Räume.	
III. Analytische Darstellung der Flächen Φ_I , Φ_{II} , Φ_{III}	424—434
6. Eine weitere einfache Konstruktion der Flächen Φ . — 7. Allgemeine analytische Darstellung der Flächen Φ_I , Φ_{II} , Φ_{III} . — 8. Sonderfälle. — 9. Realitätsfragen.	

I. Allgemeine projektive Eigenschaften der Flächen Φ .

1. Die längs der Asymptotenlinien berührenden Netzflächen aus Schmiegtangenten. Wenn eine Fläche Φ , deren Asymptotenlinien beider Scharen in linearen Komplexen liegen, bei ihrer Vektordarstellung

$$(1) \quad \Phi \dots \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$$

auf Asymptotenparameter u, v bezogen ist, so ist

$$(2) \quad [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{uu}] = 0, \quad [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{vv}] = 0.$$

Es bestehen also lineare Beziehungen der Form

$$(3) \quad \mathfrak{x}_{uu} = a \mathfrak{x}_u + b \mathfrak{x}_v, \quad \mathfrak{x}_{vv} = c \mathfrak{x}_u + d \mathfrak{x}_v.$$

Geometrisch ausgedrückt besagt dies einfach, daß für die Asymptotenlinien die Schmiegeebene der Kurve mit der Tangentenebene der Fläche zusammenfällt. Dabei ist natürlich vorausgesetzt, daß diese Asymptotenlinien nicht geradlinig sind. Es hindert aber nichts, in diesem Falle die Tangentenebene als Schmiegeebene der Geraden zu erklären und dem Satze wieder seine volle Gültigkeit zu sichern.

Betrachten wir dann eine feste Asymptotenlinie z. B. die u -Linie $v = \text{const.}$, für welche also die erste der Gleichungen (3) gilt. Sie soll Gewindekurve sein, d. h. mit ihren Tangenten ξ_u einem linearen Komplex G angehören (der mit v veränderlich ist). Ihr Tangentenvektor ξ_u und ihr Momentvektor $[\xi, \xi_u]$ bezüglich des Nullpunkts O müssen dann einer linearen Relation der Form

$$(4) \quad \alpha(v) \cdot \xi_u + \mathfrak{b}(v) \cdot [\xi, \xi_u] = 0$$

genügen, die bei festem v identisch in u gilt. Denn wenn ganz allgemein η der Richtungsvektor und $\mathfrak{z}$ der Momentvektor (bezüglich des Nullpunktes) eines allgemeinen Strahles des Gewindes G ist, so kann die PLÜCKERSche Liniengleichung des Komplexes G vektoriell in der Gestalt

$$(5) \quad G \dots \alpha(v) \cdot \eta + \mathfrak{b}(v) \cdot \mathfrak{z} = 0$$

geschrieben werden.

Bei einer Gewindekurve stimmt nun die Schmiegeebene auch mit der Nullebene des Berührungspunktes bezüglich des Nullsystems überein, das mit dem Gewinde verbunden ist. Da für unsere Asymptotenlinien aber auch die Tangentenebene mit der Schmiegeebene identisch ist, liegen bei den Flächen Φ in jedem Kreuzungspunkte zweier Asymptotenlinien alle Flächentangenten in den beiden Gewinden, denen diese Asymptotenlinien angehören. Insbesondere liegt also jede Schmiegetangente der Fläche Φ auch in dem Gewinde, welchem die sie kreuzende Asymptotenlinie angehört. Z. B. liegt im Flächenpunkte ξ die Tangente ξ_u in dem Gewinde G (5), welchem die Asymptotenlinie v angehört.

Um das auch rechnerisch zu bestätigen, müßten wir zeigen, daß bei festem v

$$(6) \quad \alpha(v) \cdot \xi_v + \mathfrak{b}(v) \cdot [\xi, \xi_v] = 0$$

ist. Zum Beweise differenzieren wir die in u identische Gleichung (4) nach u und erhalten

$$\alpha(v) \cdot \xi_{uu} + \mathfrak{b}(v) \cdot [\xi, \xi_{uu}] = 0.$$

Das besagt, wenn man ξ_{uu} mittels (3) durch ξ_u und ξ_r ausdrückt, daß

$$a(\alpha \cdot \xi_u + \mathfrak{b} \cdot [\xi, \xi_u]) + b(\alpha \cdot \xi_r + \mathfrak{b} \cdot [\xi, \xi_r]) = 0$$

ist. Hierin verschwindet nun die erste Klammer nach (4). Da (außer bei Regelflächen) $b \neq 0$ ist, folgt tatsächlich (6), w. z. b. w.

Wir zeigen nun, daß die Asymptotenrichtung $\mathfrak{x}_v$ nicht nur in dem Gewinde G der Asymptotenlinie v enthalten ist, sondern daß sie auch noch in dem Gewinde $\hat{G}$ liegt, welches die „benachbarte“ Asymptotenlinie des Parameters $v + dv$ enthält.

Das ist geometrisch klar auf Grund des Satzes, daß die Tangentenebene einer Fläche sich, beim Fortschreiten des Berührungspunktes $\mathfrak{x}$ in einer Asymptotenrichtung $\mathfrak{x}_r$, ebenfalls um dieselbe Asymptotenrichtung dreht. Diese Asymptotenrichtung liegt also auch in der Schmiegeebene der zu v benachbarten Asymptotenlinie $v + dv$, d. h. sie ist auch Gewindestrahl des Nachbargewindes $\hat{G}$ von G .

Um diese Behauptung auch analytisch zu bestätigen, denken wir uns in der Gleichung (5) des Gewindes G den Parameter v durch $v + dv$ ersetzt und erhalten so, wenn wir bis zu Gliedern 1. Ordnung entwickeln, die Gleichung des zu G benachbarten Gewindes $\hat{G}$ in der Form

$$\hat{G} \dots (\alpha + \alpha_v dv) \cdot \mathfrak{y} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{b}_v dv) \cdot \mathfrak{z} = 0$$

oder besser in der Form

$$(7) \quad \hat{G} \dots \underbrace{(\alpha \cdot \mathfrak{y} + \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{z})}_G + \underbrace{(\alpha_v \cdot \mathfrak{y} + \mathfrak{b}_v \cdot \mathfrak{z})}_{G_v} dv = 0,$$

wofür wir kürzer

$$(8) \quad \hat{G} = G + G_v dv = 0$$

schreiben wollen. Dabei sind $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ wieder Richtungs- und Momentvektor der Strahlen von $\hat{G}$.

Dies ist also die Gleichung des Gewindes $\hat{G}$, in dem die benachbarte Asymptotenlinie $v + dv$ enthalten ist. Wie soeben muß natürlich dieses benachbarte Gewinde $\hat{G}$ auch die Asymptotenrichtung

$$\hat{\mathfrak{y}} = \mathfrak{x}_v + \mathfrak{x}_{vv} dv$$

enthalten, welche die Asymptotenlinie $v + dv$ im Nachbarpunkte $\hat{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + \mathfrak{x}_v dv$ kreuzt, und deren Momentvektor bis auf Glieder 1. Ordnung

$$\hat{\mathfrak{z}} = [\hat{\mathfrak{x}}, \hat{\mathfrak{y}}] = [\mathfrak{x} + \mathfrak{x}_v dv, \mathfrak{x}_v + \mathfrak{x}_{vv} dv] = [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_v] + [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{vv}] dv$$

ist. Die Gleichung (7) ist also sicherlich durch die Gerade mit dem Richtungsvektor $\hat{\mathfrak{y}}$ und dem Momentvektor $\hat{\mathfrak{z}}$ erfüllt, d. h. es muß, wieder bis zu den Gliedern 1. Ordnung, gelten:

$$(\alpha \cdot \mathfrak{x}_v + \mathfrak{b} \cdot [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_v]) + (\alpha \cdot \mathfrak{x}_{vv} + \mathfrak{b} \cdot [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{vv}]) dv + (\alpha_v \cdot \mathfrak{x}_v + \mathfrak{b}_v \cdot [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_v]) dv = 0.$$

Hierin verschwindet aber nach (3) die zweite runde Klammer, weil sie in der Form

$$c(\alpha \cdot \mathfrak{x}_u + \mathfrak{b} \cdot [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_u]) + d(\alpha \cdot \mathfrak{x}_v + \mathfrak{b} \cdot [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_v])$$

geschrieben werden kann und die Gleichungen (4) und (6) bestehen.

Es bleibt die Gleichung

$$(\alpha \cdot \mathfrak{x}_v + \mathfrak{b} \cdot [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_v]) + (\alpha_v \cdot \mathfrak{x}_v + \mathfrak{b}_v \cdot [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_v]) dv = 0,$$

die tatsächlich aussagt, daß die Schmiegtangente $\mathfrak{x}_v$ des ursprünglichen Punktes $\mathfrak{x}$ auch noch dem Nachbargewinde $\hat{G}$ von G , d. h. dem Gewinde der benachbarten Asymptotenlinie $v + dv$ angehört.

Die Asymptotenrichtungen $\mathfrak{x}_v$, welche die feste Asymptotenlinie v queren, liegen also in den beiden benachbarten Gewinden G und $\hat{G} = G + G_v dv$ der benachbarten Asymptotenlinien v und $v + dv$; sie gehören daher auch dem Schnittnetze dieser beiden linearen Komplexe an und bilden daher insgesamt eine Netzfläche $N(v)$, welche, von querenden Asymptotenrichtungen gebildet, die Fläche Φ längs der Asymptotenlinie v berührt.

Wie die Schnittnetze können die Netzflächen sowohl getrennte als auch zusammenfallende Leitgeraden haben, d. h. sowohl hyperbolisch oder elliptisch als auch parabolisch sein.

Der bewiesene Satz gilt bei den Flächen Φ natürlich für beide Scharen von Asymptotenlinien. Zu diesen Flächen Φ gehören also insgesamt zwei Scharen von Netzflächen $N(u)$ und $N(v)$, die die Fläche Φ längs ihrer Asymptotenlinien u und v berühren und von den Asymptotenrichtungen der querenden Schar gebildet werden.

2. Projektive Äquivalenz der Asymptotenlinien jeder Schar. Erzeugung der Flächen Φ durch windschiefe Schiebung ihrer Asymptotenlinien aneinander. Auf der Netzfläche $N(v)$, welche die Fläche Φ längs ihrer Asymptotenlinie v berührt, ist diese Berührungslinie v sicherlich ebenfalls Asymptotenlinie; denn auch auf $N(v)$ gilt für v , daß ihre Schmiegeebenen Tangentenebenen sind. Wir behaupten, daß die benachbarte Asymptotenlinie $v + dv$ von Φ gleichfalls Asymptotenlinie der Netzfläche $N(v)$ ist.

Die Asymptotenlinien einer Netzfläche $N(v)$ sind nämlich identisch mit den Gewindekurven jener Strahlgewinde, welche durch das Strahlnetz gelegt werden können, in dem $N(v)$ enthalten ist. Diese Gewinde bilden ein Büschel, das in unserem Falle durch die Gewinde G und $\hat{G}$ aufgespannt wird. Die Kurve v liegt aber als Gewindekurve in G , ebenso liegt $v + dv$ als Gewindekurve in $\hat{G}$. Also sind tatsächlich sowohl die Kurve v als auch die Kurve $v + dv$ Asymptotenlinien der berührenden Netzfläche $N(v)$.

Natürlich kann man auch diese Tatsache leicht auf analytischem Wege bestätigen. Die längs der Asymptotenlinie v berührende Netzfläche $N(v)$ aus Asymptotenrichtungen $\mathfrak{x}_v$ hat die Darstellung

$$(9) \quad N(v) \dots \mathfrak{X} = \mathfrak{x}(u, v) + w \cdot \mathfrak{x}_v(u, v),$$

wobei $v = \text{const.}$ ist, während u und w laufende Parameter sind. Unsere Behauptung geht nun dahin, daß in dem vorliegenden Falle die Kurven $w = 0$ und $w = dv$ Asymptotenlinien auf $N(v)$ sind.

Man findet nun aus (9) leicht, wenn man die Formeln (3) beachtet,

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_u &= \mathfrak{x}_u + w \cdot \mathfrak{x}_{uv} \\ \mathfrak{X}_w &= \mathfrak{x}_v \\ \mathfrak{X}_{uu} &= \mathfrak{x}_{uu} + w \cdot \mathfrak{x}_{uuv} = (a \mathfrak{x}_u + b \mathfrak{x}_v) + w \cdot (a \mathfrak{x}_{uv} + b \mathfrak{x}_{vv}) \\ &= (a + b c w) \mathfrak{x}_u + (b + b d w) \mathfrak{x}_v + a w \mathfrak{x}_{uv} \\ \mathfrak{X}_{uw} &= \mathfrak{x}_{uv} \\ \mathfrak{X}_{ww} &= 0 \end{aligned}$$

und daraus die Außenprodukte

$$\begin{aligned} L' &= [\mathfrak{X}_u, \mathfrak{X}_w, \mathfrak{X}_{uu}] = -b c w^2 [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{uv}] \\ M' &= [\mathfrak{X}_u, \mathfrak{X}_u, \mathfrak{X}_{uw}] = [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{uv}] \\ N' &= [\mathfrak{X}_u, \mathfrak{X}_w, \mathfrak{X}_{ww}] = 0. \end{aligned}$$

Da für Φ sicherlich $[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{uv}] \neq 0$ ist, lautet die Differentialgleichung der Asymptotenlinien auf der Netzfläche $N(v)$

$$(10) \quad du (b c w^2 du - 2 dw) = 0.$$

Durch ihre Integration findet man 1) die Schar der geradlinigen Erzeugenden $u = \text{const.}$ der Netzfläche $N(v)$ und 2) für die Schar der krummlinigen Asymptotenlinien von $N(v)$ die Beziehung

$$b c u + \frac{2}{w} = \frac{2}{k} = \text{konst.},$$

welche man bequemer auch in der Form

$$(11) \quad w = \frac{k}{1 - \frac{b c}{2} \cdot k u}$$

schreiben kann. Dabei ist k eine Integrationskonstante.

Man liest nun aus (11) unmittelbar ab, daß erstens $k = 0$ auf $w = 0$ führt, d. h. daß die Berührungskurve v von Φ und $N(v)$ eine Asymptotenlinie der Netzfläche ist, und daß $k = dv$ auf

$$\begin{aligned} w &= \frac{dv}{1 - \frac{b c}{2} u dv} = dv \cdot \left(1 + \frac{b c}{2} u dv + \dots\right) \\ &= dv + \text{Glieder höherer Ordnung} \end{aligned}$$

führt, d. h. daß auch die benachbarte Kurve $v + dv$ von Φ Asymptotenlinie der Netzfläche $N(v)$ ist.

Benachbarte Asymptotenlinien v und $v + dv$ der Fläche Φ sind also auf der Netzfläche $N(v)$, welche Φ längs v berührt und von den Asymptotenrichtungen der querenden Schar gebildet wird, ebenfalls Asymptotenlinien.

Jede Netzfläche gestattet nun eine eingliedrige Gruppe von windschiefen Kollineationen (windschiefen „Schiebungen“) in sich, bei denen ihre Punkte auf den Erzeugenden der Fläche, d. h. auf Netzstrahlen in projektiver Weise verschoben werden, wobei die

Punkte der beiden (verschiedenen oder zusammenfallenden) Leitgeraden des Netzes festbleiben. Bei diesen windschiefen Schiebungen werden die Asymptotenlinien der Netzfläche untereinander vertauscht; sie sind daher einander projektiv äquivalent, d. h. durch windschiefe Schiebungen kongruent.

Weil die Asymptotenlinien auf der berührenden Netzfläche $N(v)$ sind, gilt dies auch für benachbarte Asymptotenlinien v und $v + dv$ unserer Flächen Φ . *Je zwei benachbarte Asymptotenlinien der Flächen Φ sind zueinander projektiv verwandt und entstehen auseinander durch eine windschiefe Schiebung, wobei sich solche Punkte der Asymptotenlinien entsprechen, welche auf derselben Schmiegtangente der querenden Schar liegen. Als Doppelgeraden dieser windschiefen Schiebungen fungieren dabei die Leitgeraden der Netzflächen $N(v)$, welche von diesen querenden Asymptotenrichtungen gebildet werden.*

Durch integrale Zusammensetzung dieser infinitesimalen Schiebungen ergibt sich, daß alle Asymptotenlinien der einen Schar auf den Flächen Φ aus einer dieser Asymptotenlinien, z. B. aus der Linie v_0 , durch einen kontinuierlichen Prozeß windschiefer Schiebungen entstehen, wobei diese Asymptotenlinien in jedem Augenblick in Richtung der sie querenden Asymptotenrichtungen verschoben werden. Dasselbe gilt für die andere Schar. Irgend zwei Asymptotenlinien derselben Schar sind also zueinander projektiv äquivalent, wobei sich solche Punkte auf ihnen entsprechen, die auf derselben Asymptotenlinie der anderen (querenden) Schar liegen.

Die Flächen Φ , deren beide Scharen von Asymptotenlinien linearen Komplexen angehören, können also, ausgehend von zwei festen, einander kreuzenden Asymptotenlinien u_0 und v_0 durch kontinuierliche windschiefe Schiebungen der einen Asymptotenlinie längs der anderen (oder umgekehrt) erzeugt werden. Die Achsen dieser windschiefen Schiebungen sind dabei in jedem Augenblicke mit den Leitgeraden jener berührenden Netzflächen $N(u)$ bzw. $N(v)$ identisch, die von den querenden Asymptotenrichtungen, d. h. von den augenblicklichen Schiebungsrichtungen gebildet werden. Die Schiebungen der beiden Prozesse sind miteinander vertauschbar, weil sie dieselbe Fläche Φ erzeugen und gleichberechtigt sind.

3. Die Mannigfaltigkeit der Schiebungsachsen [Leitgeraden der berührenden Netzflächen N] kann drei Klassen angehören; dementsprechend existieren auch drei Klassen von Flächen Φ . Aus der Vertauschbarkeit der windschiefen Schiebungsprozesse, welche natürlich auch im Kleinen für die infinitesimalen Schiebungen bestehen muß, durch die die Asymptotenlinie u in $u + du$ und v in $v + dv$ übergeführt wird, kann man sehr leicht folgern, daß die Achsen dieser windschiefen Schiebungen, d. h. die Leitgeraden der Netzflächen $N(u)$ und $N(v)$, welche der Fläche Φ längs der Asymptotenlinien u

und v umschrieben sind, sich paarweise schneiden, d. h. ein windschiefes Vierseit bilden (oder jenen Grenzfall dieser Figur, bei welchem ein oder beide Gegenseitenpaare zusammengerückt sind).

Es gilt nämlich ganz allgemein der Satz, daß bei zwei vertauschbaren windschiefen Kollineationen, deren Achsen nicht identisch sind, die Achsen der einen von ihnen stets Bahngeraden der andern sind (und umgekehrt). Es ist dabei gleichgültig, ob diese Achsenpaare aus zwei verschiedenen oder zusammenfallenden Geraden bestehen. Beide Achsenpaare zusammen bilden in jedem Falle ein windschiefes Vierseit oder einen der genannten Grenzfälle davon.

Sollen nämlich die windschiefen Kollineationen A und B vertauschbar, d. h. $AB = BA$ sein, so ist $B = A^{-1}BA$ und $A = B^{-1}AB$. B muß also bei Transformation durch A ungeändert bleiben und A bei Transformation durch B . Es müssen also auch die Achsen von B , wenn man sie der Kollineation A unterwirft, ungeändert bleiben, d. h. entweder Achsen von A oder Bahngeraden von A sein. Da die erste Möglichkeit in unserem Falle ausscheidet, bleibt nur die zweite Möglichkeit. Aus demselben Grunde sind auch die Achsen von A Bahngeraden von B , womit der Satz bewiesen ist. Es folgt aus ihm, daß die Achsen zweier vertauschbarer windschiefer Kollineationen sich ebenfalls schneiden und daher entweder ein windschiefes Vierseit bilden oder jene Figur, die daraus entsteht, wenn ein oder beide Gegenseitenpaare zusammenrücken.

Um von diesen Verhältnissen eine ganz klare Vorstellung zu gewinnen, wollen wir diese verschiedenen Möglichkeiten auch kurz analytisch durch einfache Normaltypen realisieren. Die windschiefe Kollineation A mit getrennten Achsen $[0_0 0_1]$ und $[0_2 0_3]$ lautet

$$(12a) \quad \begin{aligned} x'_0 &= x_0 \\ x'_1 &= x_1 \\ x'_2 &= ax_2 \\ x'_3 &= ax_3. \end{aligned}$$

Rücken wir die Achsen in geeigneter Weise in die Gerade $[0_2 0_3]$ zusammen, so ergibt sich die parabolische windschiefe Kollineation A der Darstellung

$$(13a) \quad \begin{aligned} x'_0 &= x_0 \\ x'_1 &= x_1 \\ x'_2 &= x_0 + ax_2 \\ x'_3 &= x_1 + ax_3. \end{aligned}$$

Mit diesen windschiefen Schiebungen A sind die folgenden Normaltypen von Schiebungen B vertauschbar. Zunächst die Schiebung B mit den getrennten Achsen $[0_0 0_2]$ und $[0_1 0_3]$:

$$(12b) \quad \begin{aligned} x'_0 &= x_0 \\ x'_1 &= bx_1 \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= bx_3, \end{aligned}$$

dann aber auch die *parabolische Schiebung* B , deren Achsen in der Geraden $[0_2 0_3]$ zusammengedrückt sind, und deren Darstellung lautet:

$$(13b) \quad \begin{aligned} x'_0 &= x_0 \\ x'_1 &= b x_0 + x_1 \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= b x_2 + x_3. \end{aligned}$$

Man prüft tatsächlich leicht nach, daß allemal $A B = B A$ ist.

Die Achsen der vertauschbaren windschiefen Kollineationen A und B bilden dabei, wenn man die Kollineation (12a) und (12b) als A und B wählt, das windschiefe Vierseit der Geraden $[0_0 0_1]$, $[0_1 0_3]$, $[0_3 0_2]$, $[0_2 0_0]$: wählt man dagegen als A und B die Schiebungen (12a) und (13b), so entartet dieses Vierseit, indem seine Kante $[0_0 0_1]$ in die Gegenkante $[0_2 0_3]$ rückt: (ähnliches geschieht, wenn man (13a) und (12b) zusammenstellt). Wählt man schließlich als A und B die beiden parabolischen Schiebungen (13a) und (13b), so degeneriert das Vierseit weiter, indem jetzt auch noch die Kante $[0_0 0_3]$ in die Gegenkante $[0_1 0_2]$ rückt.

Natürlich können die oben gewählten windschiefen Kollineationen mit getrennten Achsen auch hochimaginäre windschiefe Achsen haben, d. h. es können an Stelle der gewählten hyperbolischen auch elliptische Schiebungen treten. Das wird später tatsächlich bei unseren Normaltypen der Fall sein.

Betrachten wir jetzt die Gewinde $G(u)$ und $G(v)$, welche zu zwei beliebigen, sich im Punkte $\mathfrak{z}$ der Fläche Φ kreuzenden, Asymptotenlinien u und v gehören. Es ist leicht zu sehen, daß diese Gewinde in Involution liegen, d. h. daß jedes von ihnen durch das Nullsystem des andern in sich übergeht.

Beide Gewinde enthalten nämlich das Büschel der Flächentangenten des Punktes $\mathfrak{z}$, das bei ihren Nullsystemen festbleibt, und die Leitgeraden der längs u und v berührenden Netzflächen $N(u)$ bzw. $N(v)$ sind für $G(u)$ bzw. $G(v)$ nullpolare Geraden. Da sie einander paarweise schneiden, sind die Leitgeraden von $N(u)$ nämlich Gewindestrahlen von $G(v)$ und daher gegen das Nullsystem von $G(v)$ invariant. Da sie zusammen mit dem Tangentenbüschel des Flächenpunktes $\mathfrak{z}$ das Gewinde $G(u)$ eindeutig bestimmen, ist also $G(u)$ gegen das Nullsystem von $G(v)$ unempfindlich (und umgekehrt), d. h. diese Gewinde liegen tatsächlich involutorisch. Dieser Nachweis gilt auch für den Grenzfall der parabolischen Netze, weil auch diese zusammen mit dem Tangentenbüschel im Flächenpunkte $\mathfrak{z}$ die Gewinde eindeutig bestimmen.

Da jedes Gewinde $G(u)$ mit jedem Gewinde $G(v)$ in Involution liegt, haben wir damit den Satz von LIE¹⁾ gewonnen, der besagt:

Wenn auf einer Fläche Φ die Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören, so sind diese Komplexe notwendig zwei involutorischen Gewindebündeln entnommen.

Natürlich können diese involutorischen Gewindebündel zum Teil oder beide auch aus bloßen Gewindebüscheln bestehen; das wird der Fall sein, wenn die Fläche Φ selber eine Netzfläche ist oder wenn sie eine reguläre Quadrik ist. Ihre Asymptotenlinien bestehen dann im ersten Falle aus den Erzeugenden der Netzfläche (die sicherlich

in linearen Komplexen liegen) und, wie wir schon benützten, aus jenen Flächenkurven, welche den Gewinden des Büschels angehören, das durch das Netz der Flächenerzeugenden gelegt werden kann. Im zweiten Falle sind die Asymptotenlinien natürlich mit den Erzeugenden der beiden Scharen der Quadrik identisch.

Wenn wir von diesen beiden Sonderfällen absehen, bestimmen irgend zwei Gewinde eines jeden der beiden involutorischen Bündel, z. B. auch die benachbarten Gewinde G und $\hat{G}$, welche benachbarte Asymptotenlinien der Fläche Φ enthielten, ein im Bündel enthaltenes Büschel von Gewinden. Je nach der Mannigfaltigkeit, welche die Leitgeraden der Schnittnetze dieser Büschel, (d. h. die Trägergeraden der sogenannten singulären Gewinde ihrer Büschel) bilden, zerfallen die involutorischen Gewindebündel in drei verschiedene Klassen:

Die Achsen der singulären Gewinde, d. h. die Leitgeraden der Netze, in denen sich irgend zwei Gewinde der involutorischen Gewindebündel schneiden, bilden nämlich entweder

- I. die beiden ergänzenden Regelscharen einer regulären Quadrik Q , oder
- II. zwei einander ergänzende Paare verschränkter Strahlbüschel, oder
- III. ein doppelt-überdecktes und doppelt-gezähltes Strahlbüschel.

Weil die Leitgeraden der Netzflächen $N(u)$ und $N(v)$, die man den Flächen Φ längs ihrer Asymptotenlinien u und v in Richtung der querenden Schmiegtangenten umschreiben kann, ebenfalls als Achsen singulärer Gewinde der beiden involutorischen Gewindebündel aufgefaßt werden können, in denen die Asymptotenlinien der Fläche Φ enthalten sind, folgt der Satz:

Die Flächen Φ , deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören, zerfallen je nach der Art dieser notwendig involutorischen Komplexbündel in drei Klassen: die Leitgeraden der Strahlnetze, in denen die längs der Asymptotenlinien der Flächen Φ möglichen Asymptotenrichtungen der querenden Schar liegen, bilden nämlich entweder

- I. die beiden ergänzenden Regelscharen einer regulären Quadrik Q oder
- II. zwei einander ergänzende Paare verschränkter Strahlbüschel oder
- III. ein doppelt-überdecktes und doppelt-gezähltes Strahlbüschel.

Wir bezeichnen die Flächen Φ dieser drei Klassen fortan mit Φ_I , Φ_{II} , Φ_{III} . Man kann die Flächen Φ_{II} und Φ_{III} als Grenzfälle der Flächen Φ_I auffassen, weil 1) zwei verschränkte Strahlbüschel (d. s. solche, die einen Strahl gemeinsam haben, deren Scheitel und Ebenen aber verschieden sind) eine liniengeometrische Grenzfigur einer Regelschar auf einer regulären Quadrik sind, wobei sich die ergänzende Regelschar der Quadrik auf das ergänzende verschränkte Strahlbüschel-

paar überträgt (d. h. jenes, das dieselben Ebenen aber vertauschte Scheitel hat) und weil 2) durch Vereinigung dieser Scheitel und Ebenen als weitere Grenzfigur daraus auch noch das doppelt-überdeckte Strahlbüschel (in zweimaliger Zählung) entsteht.

Wir erreichen durch diese Einteilung der Flächen Φ in drei Klassen auch eine Übersicht über die windschiefen Schiebungen, durch welche wir die Flächen Φ aus ihren Asymptotenlinien erzeugen konnten. Die Achsen dieser windschiefen Schiebungen sind nämlich identisch mit den Leitgeraden der Strahlnetze, in denen die längs der Asymptotenlinien von Φ querenden Asymptotenrichtungen enthalten sind, und bilden daher in ihrer Gesamtheit wieder eine der Figuren, die wir unter den Punkten I, II und III aufgezählt haben.

Es ist klar, daß im Falle III nur parabolische Schiebungen, im Falle II (je nach den Realitätsverhältnissen der verschränkten Strahlbüschel) nur hyperbolische bzw. nur elliptische Schiebungen und parabolische Schiebungen nur als Ausnahmefall, wenn die Schnittgerade der verschränkten Strahlbüschel Achse ist, im Falle I endlich bei nullteiliger Quadrik Q nur elliptische, bei einteilig-ringförmiger Quadrik Q aber elliptische, hyperbolische und parabolische Schiebungen auftreten werden.

II. Gemeinsame metrische Eigenschaften der Flächen Φ_I , Φ_{II} und Φ_{III} im elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raum.

4. Heranziehung der Metrik und Kinematik des elliptischen, quasi-elliptischen und isotropen Raumes. Da die Frage nach den Flächen Φ , deren Asymptotenlinien linearen Komplexen angehören, eine solche der projektiven Differentialgeometrie ist, liegt es nahe, die Figuren der Liniengeometrie, auf welche wir bei der Unterscheidung der Flächen Φ in drei Klassen gestoßen sind, durch geeignete (reelle oder komplexe) projektive Umformungen in gewisse einfache Normfiguren zu verwandeln. Es steht uns in diesem Sinne frei, und bedeutet für die Flächen Φ keinen Verlust an Allgemeinheit, wohl aber vielleicht eine (unwesentliche) Verschiebung ihrer Realitätsverhältnisse, die drei oben beschriebenen liniengeometrischen Figuren (Achsenmannigfaltigkeiten der singulären Gewinde von involutorischen Gewindebündeln) der Reihe nach aufzufassen als

I. die beiden Regelscharen der nullteiligen Kugel Q

$$(14) \quad Q \dots x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

die dann an die Stelle der regulären Quadrik Q tritt, oder als

II. die beiden ergänzenden Paare verschränkter Strahlbüschel, deren (konjugiert-komplexe) Ebenen das Ebenenpaar

$$(15) \quad x_0^2 + x_1^2 = 0$$

und deren (konjugiert-komplexe) Scheitel das Punktepaar

$$(15') \quad u_2^2 - u_3^2 = 0$$

bilden, oder als

III. das doppelt-überdeckte und doppelt-gezählte Strahlbüschel der Ebene

$$(16) \quad x_0^2 = 0,$$

dessen Scheitel der Punkt

$$(16') \quad u_3^2 = 0$$

ist.

Zeichnet man im Falle III in dem Strahlbüschel noch zwei feste Geraden, zweckmäßigerweise das (konjugiert-komplexe) Geradenpaar

$$(16'') \quad x_0 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 = 0$$

aus, so kann man die erhaltenen Figuren als absolute Gebilde einer projektiven Metrik wählen, die dann der Reihe nach identisch ist mit der Metrik

I. eines elliptischen Raumes,

II. eines quasielliptischen Raumes,

III. eines isotropen Raumes.

Jede dieser Metriken ist in sich dual, weil ihr absolutes Gebilde in sich dual ist.

Über die so entstehenden nichteuklidischen Strecken- und Winkelmessungen genügen uns die folgenden Bemerkungen:

I. Man kann im elliptischen Raum die homogenen Koordinaten der Punkte $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, welche der absoluten Fläche Q nicht angehören, durch die Forderung

$$(17) \quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

normieren und ähnlich die homogenen Koordinaten der Ebenen $u = (u_0, u_1, u_2, u_3)$, welche die absolute Fläche Q nicht berühren, durch die Forderung

$$(17') \quad u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1.$$

Das Bogenelement des elliptischen Raumes ist dann durch die Formel

$$(18) \quad ds^2 = dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

gegeben und (dual) im elliptischen Ebenenraum der Kontingenzwinkel durch die Formel

$$(18') \quad d\sigma^2 = du_0^2 + du_1^2 + du_2^2 + du_3^2.$$

II. Man kann in entsprechender Art im quasielliptischen Raum die homogenen Koordinaten der Punkte, welche dem absoluten Ebenen-

paare nicht angehören, durch die Forderung

$$(19) \quad x_0^2 + x_1^2 = 1$$

normieren und ähnlich die homogenen Koordinaten der Ebenen, welche nicht dem absoluten Punktepaare angehören, durch die Forderung

$$(19') \quad u_2^2 + u_3^2 = 1.$$

Das Bogenelement des quasielliptischen Raumes ist dann durch die Formel

$$(20) \quad ds^2 = dx_0^2 + dx_1^2$$

gegeben und (dual) im quasielliptischen Ebenenraum der Kontingenzwinkel durch die Formel

$$(20') \quad d\sigma^2 = du_2^2 + du_3^2.$$

III. Man kann endlich im isotropen Raume die homogenen Koordinaten der Punkte, welche der absoluten Ebene (Fernebene $x_0 = 0$) nicht angehören, durch die Forderung

$$(21) \quad x_0 = 1$$

normieren und (dual) die homogenen Koordinaten der Ebenen, welche nicht den absoluten Punkt (Fernpunkt $u_3 = 0$) enthalten, durch die Forderung

$$(21') \quad u_3 = 1.$$

D. h. man kann die Punkte des isotropen Raumes durch die inhomogenen Koordinaten

$$1:x:y:z = x_1:x_2:x_3$$

beschreiben und (dual) seine Ebenen durch die inhomogenen Koordinaten

$$w:u:v:\mathfrak{t} = u_0:u_1:u_2:u_3$$

(so daß die Gleichung einer Ebene die normierte Gestalt

$$-z = u \cdot x + v \cdot y + w$$

erhält). Dann nimmt das Bogenelement des isotropen Raumes die Gestalt

$$(22) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2$$

an und der Kontingenzwinkel lautet dual dazu

$$(22') \quad d\sigma^2 = du^2 + dv^2.$$

Die Kinematik des elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raumes ist beherrscht von der Existenz zweier vertauschbarer dreigliedriger Gruppen von windschiefen Kollineationen, deren Achsen dem absoluten Gebilde dieser Räume angehören. Nach dem Vorbilde der elliptischen Raumgeometrie, wo diese beiden Gruppen windschiefer Schiebungen zuerst (1873) von W. K. CLIFFORD entdeckt worden sind, bezeichnen wir diese besonderen Bewegungen der drei Räume als

CLIFFORDSche Schiebungen. Als Bewegungen können sie deswegen gedeutet werden, weil sie jede Raumfigur in eine elliptisch-quasielliptisch- oder isotropkongruente überführen, und Schiebungen heißen sie deswegen, weil sie (d. h. ihre eingliedrigen stetigen Untergruppen) geradlinige Bahnen haben.

Wichtig ist für uns die Möglichkeit, diese CLIFFORDSchen Schiebungen in jedem der drei Räume in einfachster Weise durch je ein System von höheren komplexen Zahlen beschreiben zu können, nämlich durch das System der HAMILTONSchen Quaternionen im elliptischen Falle, und zwei Grenzfälle davon im quasielliptischen und im isotropen Falle.

Wir geben die entsprechenden Formeln kurz wieder und beginnen

I. mit den CLIFFORDSchen Schiebungen des elliptischen Raumes. Bezeichnen $a, b, x \dots$ HAMILTONSche Quaternionen, also höhere komplexe Zahlen mit vier Einheiten

$$(23) \quad x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3,$$

welche der Produkttafel

$$(24) \quad \begin{array}{c|cccc} & e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_0 \cdot & e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 \cdot & e_1 & -e_0 & e_3 & -e_2 \\ e_2 \cdot & e_2 & -e_3 & -e_0 & e_1 \\ e_3 \cdot & e_3 & e_2 & -e_1 & -e_0 \end{array}$$

genügen, so kann man durch die Gleichungen

$$(25_l) \quad x' = a \cdot x \quad \left| \quad (25_r) \quad x' = x \cdot b \right.$$

die CLIFFORDSchen Links-
schiebungen S_l

die CLIFFORDSchen Rechts-
schiebungen S_r

des elliptischen Raumes beschreiben. Diese Schiebungen lassen jeweils die Erzeugenden einer Schar der Maßfläche Q einzeln fest (indem sie die Punkte von Q auf ihnen verschieben), während von der anderen Schar nur zwei Erzeugende punktwise festbleiben, die dann als die Achsen dieser windschiefen Schiebungen fungieren. Jede der beiden Schiebungsgruppen ist dreigliedrig und vertauscht die Punkte und Ebenen des Raumes (soweit sie nicht der Maßfläche Q angehören) in einfach-transitiver Weise. Miteinander in beliebiger Reihenfolge zusammengesetzt liefern die beiden Schiebungsgruppen S_l^3 und S_r^3 die sechsgliedrige Gruppe der Bewegungen des elliptischen Raumes, deren Darstellung durch Quaternionen also

$$(26) \quad x' = a x b$$

ist.

II. Die CLIFFORDSchen Schiebungen des quasielliptischen Raumes können in genau derselben Weise durch einen Grenzfalle

der HAMILTONschen Quaternionen, den zuerst STUDY¹²⁾ für die Darstellung der ebenen Bewegungen benützt hat, dargestellt werden. Läßt man nämlich die vier Einheiten der Produkttafel

$$(27) \quad \begin{array}{c|cccc} & \cdot e_0 & \cdot e_1 & \cdot e_2 & \cdot e_3 \\ \hline e_0 \cdot & e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 \cdot & e_1 & -e_0 & e_3 & -e_2 \\ e_2 \cdot & e_2 & -e_3 & 0 & 0 \\ e_3 \cdot & e_3 & e_2 & 0 & 0 \end{array}$$

gehorschen, so stellen die Formeln (25) wieder die *quasielliptischen Links- und Rechtsschiebungen* dar, welche je eine dreigliedrige Gruppe bilden und, in kommutativer Weise zusammengesetzt, die sechsgliedrige *Bewegungsgruppe* (26) des *quasielliptischen Raumes* ergeben. Jede der beiden CLIFFORDschen Schiebungsgruppen vertauscht wieder die Punkte und Ebenen des Raumes (soweit sie nicht mit dem absoluten Ebenenpaar (19) bzw. dem absoluten Punktepaar (19') inzidieren) in einfach-transitiver Weise. Jede quasielliptische CLIFFORD-Schiebung läßt von den beiden Paaren verschränkter Strahlbüscheln, welche das absolute Gebilde des quasielliptischen Raumes aufbauen, das eine Paar elementweise fest, indem bei ihr die Punkte der absoluten Ebenen die Strahlen dieser Büschel durchwandern, während in dem anderen (ergänzenden) Paar verschränkter Strahlbüschel genau zwei Strahlen (in jedem Büschel ein Strahl) punktweise festbleiben. Dieses Strahlenpaar bildet dann wieder das Achsenpaar der quasielliptischen CLIFFORDschen Schiebung. Alle diese quasielliptischen Schiebungen sind (ebenso wie übrigens auch im elliptischen Raume), von elliptischer Art (konjugiert-komplexe Achsen). Nur als *Sonderfall* können auch *parabolische Schiebungen* auftreten, nämlich dann, wenn die Schiebungsrichtungen die Schnittgerade der absoluten Ebenen (19) oder, was dasselbe ist, die Verbindungsgerade der absoluten Punkte (19') treffen.

III. Die CLIFFORDschen Schiebungen des isotropen Raumes können gleichfalls durch ein System höherer komplexer Zahlen, das ein *Grenzfall der HAMILTONschen und STUDYschen Quaternionen* ist, und das ich¹³⁾ bei verschiedenen Gelegenheiten benutzt habe, beschrieben werden. Läßt man nämlich jetzt die vier Einheiten des Systems der Produkttafel

$$(28) \quad \begin{array}{c|cccc} & \cdot e_0 & \cdot e_1 & \cdot e_2 & \cdot e_3 \\ \hline e_0 \cdot & e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 \cdot & e_1 & 0 & e_3 & 0 \\ e_2 \cdot & e_2 & -e_3 & 0 & 0 \\ e_3 \cdot & e_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

genügen, so liefern die Formeln (25) die *Links- und Rechtsschiebungen des isotropen Raumes*, welche ebenfalls je eine dreigliedrige, hinsichtlich der eigentlichen Punkte und der nicht z -parallelen Ebenen (d. s. jene, die mit den isotropen absoluten Elementen (16) nicht inzidieren) einfach-transitive Gruppe bilden. In jeder dieser Gruppen kommen jetzt die z -parallelen („vollisotropen“) Schiebungen vor; das kommutative Produkt der beiden CLIFFORDSchen Schiebungsgruppen ist daher nur eine fünfgliedrige Gruppe von besonderen Bewegungen des isotropen Raumes, deren Darstellung wieder (26) liefert. Ich habe diese Bewegungen als *isotrope Grenzbewegungen* bezeichnet. *Alle isotropen CLIFFORDSchen Schiebungen sind parabolischer Art*. Sie lassen das doppeltüberdeckte Strahlbüschel (16) der absoluten Geraden des isotropen Raumes elementweise fest, indem sie die Punkte der absoluten Ebene auf seinen Strahlen verschieben; jedoch bleibt eine dieser Geraden sogar punktweise fest, nämlich jene, die als Achse dieser parabolischen CLIFFORDSchen Schiebungen fungiert.

Man bezeichnet ganz allgemein in allen drei Räumen die Bahngeraden einer Linksschiebung (25₁) als im CLIFFORDSchen Sinn linksparallel, während die Bahngeraden einer Rechtsschiebung (25₂) als CLIFFORDSche Rechtsparallelen bezeichnet werden.

CLIFFORDSche Parallelen schneiden im elliptischen Raume die Maßfläche Q (14) nach zwei (konjugiert-komplexen) Erzeugenden derselben Schar, im quasielliptischen Raume treffen sie zwei (konjugiert-komplexe) Strahlen des einen Paares verschränkter Strahlbüschel, das im absoluten Gebilde (15) vorhanden ist, im isotropen Raume schneiden sie einen und denselben Strahl des absoluten Strahlbüschels (16). Diese Eigenschaft ist im elliptischen und quasielliptischen Raume für die Feststellung des CLIFFORDSchen Parallelismus auch hinreichend. *Alle Bahngeraden einer CLIFFORDSchen Links- oder Rechtsschiebung und damit auch alle zu einer festen Geraden g links- oder rechtsparallelen Geraden bilden also je ein Strahlnetz, das wir als das Linksnetz bzw. Rechtsnetz der Geraden bezeichnen.* Diese Links- und Rechtsnetze sind im elliptischen Raume stets elliptisch, ebenso im quasielliptischen Raume, solange nicht der parabolische Ausnahmefall vorliegt; sie sind dagegen im isotropen Raume stets parabolisch. Unter den Strahlen dieser Linksnetze bzw. Rechtsnetze kommen stets (als Schiebungsbahnen seiner Punkte) die Erzeugenden der einen bzw. anderen Schar des absoluten Gebildes vor. Man kann diese Erzeugenden daher als Linksschar bzw. Rechtsschar unterscheiden. Nur im isotropen Raume decken sich beide Scharen in dem einzigen absoluten Strahlbüschel; zur Unterscheidung dieser Strahlbüschel wird man dann noch die Links- bzw. Rechtsnetze heranziehen müssen, als deren Elemente (Leitgeraden) ihre Erzeugenden gerade auftreten.

Es ist leicht, die Liniengleichung dieser Links- und Rechtsnetze zu berechnen. Um zum Beispiel das Linksnetz zu finden,

welches die Verbindungsgerade der Punkte x und x' enthält, wird man bemerken, daß es genau eine Linksschiebung $x' = a \cdot x$ gibt, welche den Punkt x in x' überführt. Sie ist durch die Quaternion

$$(29) \quad a = x' \cdot x^{-1}$$

eindeutig bestimmt. Genau so erhält man für die Rechtsschiebung $x' = x \cdot b$, die x nach x' bringt, die Quaternion

$$(30) \quad b = x^{-1} \cdot x',$$

wobei x^{-1} stets die zu x reziproke Quaternion bedeutet, die bei den Normierungen (17), (19) und (21) durch die Gleichung

$$(31) \quad x^{-1} = x_0 e_0 - x_1 e_1 - x_2 e_2 - x_3 e_3$$

definiert ist. Im zweiten Falle bilden die Verbindungsgeraden der Punkte x und x' ein Rechtsnetz. Führt man die Berechnung der Quaternionen a und b in den drei Räumen auf Grund der Produkttafeln (24), (27) und (28) aus, so erkennt man, daß die Vektoranteile dieser Quaternionen, d. h. die Ausdrücke $a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ bzw. $b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$ nur von den Linienkoordinaten $p_{ik} = x_i x'_k - x_k x'_i$ der Bahngeraden abhängen. Man erhält so im elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raume die durch die Quaternionen a und b bestimmten Links- bzw. Rechtsnetze durch die folgenden Gleichungen dargestellt:

	Linksnetze:	Rechtsnetze:
(32)	I. $\left\ \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ p_{01} + p_{23} & p_{02} + p_{31} & p_{03} + p_{12} \end{array} \right\ = 0$	$\left\ \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \\ p_{01} - p_{23} & p_{02} - p_{31} & p_{03} - p_{12} \end{array} \right\ = 0$
	II. $\left\ \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ p_{01} & p_{02} + p_{31} & p_{03} + p_{12} \end{array} \right\ = 0$	$\left\ \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \\ p_{01} & p_{02} - p_{31} & p_{03} - p_{12} \end{array} \right\ = 0$
	III. $\left\ \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ p_{01} & p_{02} & p_{03} + p_{12} \end{array} \right\ = 0$	$\left\ \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \\ p_{01} & p_{02} & p_{03} - p_{12} \end{array} \right\ = 0$

Wie die erhaltenen Formeln zeigen, lassen sich diese Netze auch als Schnitte der linearen Komplexe (Gewinde) zweier zueinander involutorischer Gewindebündel auffassen, nämlich die Linksnetze als Schnitte von je zweien der „Linksgewinde“ und die Rechtsnetze als Schnitte von je zweien der „Rechtsgewinde“, deren Gleichungen im elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raume lauten:

	Linksgewinde: G_l	Rechtsgewinde: G_r
(33)	I. $u_1(p_{01} + p_{23}) + u_2(p_{02} + p_{31}) + u_3(p_{03} + p_{12}) = 0,$	$v_1(p_{01} - p_{23}) + v_2(p_{02} - p_{31}) + v_3(p_{03} - p_{12}) = 0,$
	II. $u_1 p_{01} + u_2(p_{02} + p_{31}) + u_3(p_{03} + p_{12}) = 0,$	$v_1 p_{01} + v_2(p_{02} - p_{31}) + v_3(p_{03} - p_{12}) = 0,$
	III. $u_1 p_{01} + u_2 p_{02} + u_3(p_{03} + p_{12}) = 0,$	$v_1 p_{01} + v_2 p_{02} + v_3(p_{03} - p_{12}) = 0.$

Gerade diese beiden Gewindebündel sind es, welche als Örter der Achsen ihrer singulären Gewinde (oder als Schnitte ihrer Gewinde zu dreien) die Erzeugendenscharen der Maßfläche Q (14) des elliptischen Raumes, bzw. die verschränkten Strahlbüschel des quasielliptischen Maßgebildes (15) und schließlich das doppelüberdeckte Strahlbüschel (16) und damit das absolute Gebilde des isotropen Raumes tragen.

Aus der Vertauschbarkeit der beiden Arten CLIFFORDScher Schiebungen folgt, daß *in allen drei Räumen ein Linksnetz alle Rechtsschiebungen, ein Rechtsnetz aber alle Linksschiebungen gestattet. Daraus folgt weiter, daß ein Linksgewinde ebenfalls alle Rechtsschiebungen, ein Rechtsgewinde aber alle Linksschiebungen gestattet. Unterwirft man also ein beliebiges Strahlbüschel allen möglichen Linksschiebungen, so durchläuft es ein Rechtsgewinde; umgekehrt entsteht durch Rechtsschiebung eines Strahlbüschels ein Linksgewinde.*

Die Bedeutung der linearen Komplexe der involutorischen Bündel (33) für unsere Flächen Φ erhellt daraus, daß gerade diese Komplexe G_I und G_r es sind, in denen in unseren drei lediglich projektiv-normierten Fällen die beiden Scharen von Asymptotenlinien dieser Flächen Φ_I , Φ_{II} , Φ_{III} enthalten sind. Die Bedeutung der CLIFFORDSchen Schiebungen aber liegt darin, daß sie gerade jene windschiefen Schiebungen sind, durch die man diese Flächen Φ aus ihren Asymptotenlinien gewinnen kann. Diesen Dingen wollen wir uns nach unserer Einschaltung über die Metrik und Kinematik des elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raumes nun wieder zuwenden.

5. Die Flächen Φ_I , Φ_{II} , Φ_{III} als Flächen der festen Relativkrümmung $K = -1$ des elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raumes. Ihre Erzeugung als Cliffordsche Schiebflächen dieser Räume. Wir wissen aus den Ergebnissen der **Nr. 3**, daß die linearen Komplexe, denen die Asymptotenlinien der Flächen Φ angehören, zwei involutorische Gewindebündel bilden. Je nach der Art des Durchschnittes dieser Bündel, der I. aus zwei ergänzenden Regelscharen, II. aus zwei ergänzenden Paaren verschränkter Strahlbüschel oder III. aus einem doppelüberdeckten Strahlbüschel bestehen kann, zerfallen die Flächen Φ in drei verschiedene Klassen Φ_I , Φ_{II} , Φ_{III} . Wählt man diese Durchschnittsfiguren als Maßgebilde einer nichteuklidischen Metrik, so ergibt sich nach projektiven Normierungen ein elliptischer, quasielliptischer oder isotroper Raum, in dem die Flächen Φ_I , Φ_{II} , Φ_{III} der Reihe nach eingebettet sind und es steht uns jetzt zur weiteren gemeinsamen Untersuchung dieser Flächen die Differentialgeometrie dieser Räume zur Verfügung, die von L. BIANCHI¹⁴⁾, W. BLASCHKE⁹⁾ und dem Verfasser¹⁰⁾ entwickelt worden sind.

Wir wissen ferner aus **Nr. 3**, daß die Flächen Φ durch kontinuierliche windschiefe Schiebung zweier kreuzender Asymptotenlinien längs einander erzeugbar sind, wobei die Achsen dieser Schiebungen (als Leitgeraden der Schnittnetze je zweier benachbarter Komplexe der

involutorischen Gewindebündel von oben) gerade jene Regelscharen, verschränkten Strahlbüschel und doppelten Strahlbüschel bildeten, die wir soeben zu Maßgebilden der drei nichteuklidischen Räume gemacht hatten. Diese windschiefen Schiebungen sind also in der Kinematik dieser Räume mit CLIFFORDSchen Schiebungen der einen bzw. anderen Art identisch, und es gilt daher der Satz:

Die Flächen Φ_I , Φ_{II} , Φ_{III} können in dem elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raume, dem sie angehören, erzeugt werden, indem man auf ihnen ein kreuzendes Paar von Asymptotenlinien c_r und c_l herausgreift und c_r rechtsseitig längs c_l oder umgekehrt c_l linksseitig längs c_r im CLIFFORDSchen Sinne verschiebt.

Die Bezeichnung der Asymptotenlinien ist dabei so gewählt, daß c_r in einem Rechtsgewinde und c_l in einem Linksgewinde liegt.

Gingen wir bisher immer von einer vorgegebenen Fläche Φ aus, die wir dann aus ihren damit gleichfalls gegebenen Asymptotenlinien als CLIFFORDSche Schiebfläche erzeugen konnten, so erhebt sich umgekehrt die Frage, ob man ausgehend von beliebigen Gewindekurven c_r , c_l eines Rechts- und Linksgewindes der drei Räume durch CLIFFORDSche Rechtsschiebung von c_r längs c_l bzw. durch Linksschiebung von c_l längs c_r stets eine unserer Flächen Φ erhalten kann. Die Antwort darauf wird tatsächlich bejahend sein, wenn c_r und c_l in ihrem Schnittpunkte dieselbe Schmiegeebene aufweisen: das muß ja stets bei kreuzenden Asymptotenlinien der Fall sein. Man kann dafür auch sagen, daß dem Schnittpunkte durch das an c_r bzw. c_l beteiligte Rechts- bzw. Linksgewinde dieselbe Nullebene zugewiesen werden muß.

Um zu diesem allgemeinen Satz vorzudringen, beweisen wir zuerst den folgenden, in allen drei Räumen gemeinsam gültigen Satz:

Im elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raume haben die Kurven der Rechtsgewinde und nur sie die feste Torsion $\tau = +1$, ebenso die Kurven der Linksgewinde und nur sie die feste Torsion $\tau = -1$.

Der Beweis dieses wichtigen Satzes kann ohne Rechnung wie folgt geführt werden. Die Rechts- und Linksgewinde (33) enthalten zunächst die eine Erzeugendenschar der Maßgebilde (14), (15) und (16) des elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raumes. Ihr Nullsystem führt daher diese Maßgebilde in sich über und verwandelt jede metrische Größe ohne Wertänderung in die dazu duale metrische Größe. Aus dem Bogenelemente ds der einen Kurve wird so der Kontingenzwinkel $d\sigma$ der Schmiegeebenen der dazu in den Nullsystemen der Gewinde (33) dualen Kurve und umgekehrt.

Auf die Kurven c_r und c_l der Rechts- und Linksgewinde (33) angewandt, die durch ihre eigenen Nullsysteme unter Vertauschung von Punkten und Schmiegeebenen in sich selber verwandelt werden, besagt

dies aber, daß für die Torsion dieser Kurven

$$\tau = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{ds}{d\sigma} = \frac{1}{\tau}$$

ist, d. h. die Torsion der Kurven der Rechts- und Linksgewinde (33) hat in allen drei Räumen die konstanten Werte $\tau = \pm 1$. Wir werden sogleich auch die Umkehrung beweisen und dabei sehen, daß genau die Torsion bei Rechtsgewinden den Wert $\tau = +1$ und bei Linksgewinden den Wert $\tau = -1$ hat.

Nehmen wir nun umgekehrt eine beliebige Kurve der festen Torsion

$$\tau = \frac{d\sigma}{ds} = 1$$

an. Bei ihr ist stets $d\sigma = ds$; wenn man ihre Kurvenpunkte in Richtung der Tangente t in die Nachbarpunkte verschiebt, so dreht sich die Schmiegeebene der Kurve bekanntlich ebenfalls um die Tangente t und zwar sind im vorliegenden Falle die *Schieblängen* ds gleich den *Drehwinkeln* $d\sigma$ und beide zusammen bilden Rechtsschrauben. (Im Falle $\tau = -1$ entstünden bei sonst gleichen Verhältnissen Linksschrauben.) *Diese Schiebungen können nun direkt durch CLIFFORDSche Linksschiebungen verwirklicht werden.* Denn verschiebt man ein Strahlbüschel linksseitig in den drei Räumen im CLIFFORDSchen Sinne längs einer seiner Geraden t , so daß der Scheitel auf t die Strecke ds durchwandert, dann dreht sich seine Ebene gleichfalls um t , wobei der Drehwinkel $d\sigma$ gleich der Schubstrecke ds ist und beide Bewegungen zusammen eine Rechtsschraube bilden. (Im Falle $\tau = -1$ gilt das Entsprechende für CLIFFORDSche Rechtsschiebungen.)

Zusammenfassend entstehen also die Schmiegeelemente einer Kurve c_r der festen Torsion $\tau = +1$ (bzw. einer Kurve c_l der festen Torsion $\tau = -1$) des elliptischen, quasielliptischen und des isotropen Raumes aus einem festen Schmiegeelemente dieser Kurve, indem man dieses Schmiegeelement längs der Kurve c_r (bzw. c_l) durch eine CLIFFORDSche Linksschiebung (bzw. Rechtsschiebung) verpflanzt. Daraus folgt aber, daß das Schmiegeelement ein bestimmtes Rechtsgewinde (bzw. Linksgewinde) nicht verläßt, d. h. daß die Kurve c_r der Torsion $\tau = +1$ tatsächlich in einem bestimmten Rechtsgewinde (entsprechend, bei $\tau = -1$, c_l in einem Linksgewinde) enthalten ist. *Es haben also auch umgekehrt nur die Kurven dieser Rechts- bzw. Linksgewinde (33) die feste Torsion $\tau = +1$ bzw. -1 .* Der vorgenannte Satz ist damit in vollem Umfange nachgewiesen. Seine eigentliche Wurzel ist die Tatsache, daß ein Rechtsgewinde jede Linksschiebung und ein Linksgewinde jede Rechtsschiebung gestattet.

Weil die Asymptotenlinien der Flächen Φ_I , Φ_{II} und Φ_{III} in allen drei Räumen den Rechts- und Linksgewinden (33) angehören, haben sie sicherlich in der einen Schar c_r die feste Torsion $\tau = +1$ und in der anderen Schar c_l die feste Torsion $\tau = -1$.

Nach dem auch im elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raume gültigen Satze von BELTRAMI und ENNEPER folgt daraus, daß die Flächen Φ_I , Φ_{II} und Φ_{III} in diesen Räumen die feste Relativkrümmung

$$(34) \quad K = \frac{1}{R_1 R_2} = -\tau^2 = -1$$

besitzen. R_1 und R_2 bezeichnen dabei die beiden im Sinne der jeweiligen Metrik zu verstehenden Hauptkrümmungsradien der Flächenpunkte.

Wesentlich ist nun, daß auch die Umkehrung dieser Sätze gilt. Hat nämlich eine Fläche des elliptischen, quasielliptischen oder isotropen Raumes die feste Relativkrümmung $K = -1$, so haben ihre Asymptotenlinien nach dem Satze von BELTRAMI-ENNEPER die festen Torsionen $\tau = \pm 1$ und sind daher Gewindekurven aus den involutorischen Rechts- und Linksgewinden (33), d. h. die Fläche ist notwendig eine unserer Flächen Φ , deren Asymptotenlinien beider Scharen in linearen Komplexen liegen.

Damit haben wir als erstes Hauptergebnis dieser Arbeit die folgende neue, sehr einfache und wichtige **nichteuklidische Deutung der Flächen Φ** gewonnen:

Die Flächen Φ , deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören, fallen (nach geeigneten komplexprojektiven Umformungen) mit jenen Flächen Φ_I , Φ_{II} , und Φ_{III} des elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raumes zusammen, deren Relativkrümmung $K = \frac{1}{R_1 R_2}$ den festen Wert $K = -1$ hat. Ihre Asymptotenlinien c_r und c_l haben daher in diesen Räumen die konstanten Torsionen $\tau = +1$ bzw. $\tau = -1$.

Im elliptischen Raume stimmen die Flächen Φ_I der festen Relativkrümmung $K = -1$ mit jenen Flächen überein, deren Absolutkrümmung $K_a = 1 + K = 0$ ist. Diese Flächen verschwindender GAUSSscher Krümmung $K_a = 0$ des elliptischen Raumes tragen also euklidische Metrik. Man verdankt ihre Entdeckung und ihr genaueres Studium einer berühmten Abhandlung von L. BIANCHI⁸⁾ aus dem Jahre 1896. Daß diese Flächen mit $K_a = 0$ zu jenen gehören, deren Asymptotenlinien linearen Komplexen angehören, war BIANCHI entgangen. Erst A. TERRACINI⁷⁾ hat das (1917) erkannt.

Die entsprechenden Flächen Φ_{II} der festen Relativkrümmung $K = -1$ des quasielliptischen Raumes hat W. BLASCHKE⁹⁾ entdeckt und ihre Bedeutung für die ebene Kinematik klargelegt (1938). Auf die Eigenschaft der Flächen Φ_{II} , Kurven aus linearen Komplexen als Asymptotenlinien zu haben, kommt dabei jedoch nicht die Rede.

Die Flächen Φ_{III} der festen Relativkrümmung $K = -1$ des isotropen Raumes habe ich selber^{10, 11)} im Rahmen der Untersuchungen zur Differentialgeometrie dieses Raumes eingehender studiert. Man

hat diese Flächen als Integralfächen der Differentialgleichung

$$(35) \quad K = rt - s^2 = -1$$

schon bei vielen früheren Gelegenheiten behandelt, u. a. in der affinen Differentialgeometrie, wo sie als uneigentliche Affinsphären (Flächen mit parallelen Affinnormalen¹⁵⁾) eine Rolle spielen. Daß ihre Asymptotenlinien linearen Komplexen angehören, ist verschiedentlich schon früher bemerkt worden.

Wir hatten oben bemerkt, daß jede vorgegebene Fläche Φ_I des elliptischen, Φ_{II} des quasielliptischen und Φ_{III} des isotropen Raumes der Relativkrümmung $K = -1$ aus ihren Asymptotenlinien der festen Torsion $\tau = +1$ bzw. $\tau = -1$ durch CLIFFORDSche Schiebung erzeugt werden kann. Wir sind jetzt in der Lage, auch die Umkehrung dieses Satzes zu beweisen. Wir wollen nämlich genauer das folgende zweite Hauptergebnis dieser Arbeit gewinnen, das eine **einheitliche Konstruktion der allgemeinsten Fläche Φ** enthält, deren Asymptotenlinien beider Scharen in linearen Komplexen liegen:

Es seien I. im elliptischen Raume, II. im quasielliptischen Raume, III. im isotropen Raume

c_r eine beliebige Kurve der festen Torsion $\tau = +1$ und

c_l eine beliebige Kurve der festen Torsion $\tau = -1$,

welche in ihrem Schnittpunkte P dieselbe Schmiegebene haben.

Verschiebt man dann (im CLIFFORDSchen Sinne der betreffenden Raumkinematik) diese beiden Kurven aneinander und zwar entweder

c_r rechtsseitig längs c_l oder

c_l linksseitig längs c_r ,

so entsteht, abgesehen von komplex-projektiven Umformungen, die allgemeinste Fläche Φ_I , Φ_{II} , Φ_{III} mit zwei (verschiedenen) Scharen von Asymptotenlinien, die linearen Komplexen angehören. Diese Asymptotenlinien fallen dabei mit den verschiedenen Lagen der Schiebkurven c_r und c_l zusammen; sie sind also im Sinne der Metrik der drei Räume scharweise untereinander kongruent und haben alle die Torsion $\tau = +1$ bzw. $\tau = -1$. Die Flächen selbst aber haben jeweils die feste Relativkrümmung $K = -1$.

In der Tat wird zunächst, wegen der Vertauschbarkeit der Rechts- und Linksschiebungen, auf beide Arten jedenfalls dieselbe Fläche erzeugt. Da ferner z. B. c_l einem bestimmten Linksgewinde (33) angehört, das alle Rechtsschiebungen gestattet, wird die gemeinsame Schmiegebene π der Kurven c_r und c_l im Kreuzungspunkte P bei der Rechtsschiebung von c_r längs c_l genau den Schmiegestreifen von c_l beschreiben; da ferner bei dieser Rechtsschiebung das anfängliche Schmiegeelement (P, π) starr mit der Kurve c_r verbunden bleibt, sind die einzelnen Schmiegelemente von c_l und die Schmiegelemente der kreuzenden Lagen von c_r identisch, d. h. c_l ist Asymptotenlinie der

erzeugten Fläche. Dieselbe Überlegung gilt für c_r , das also ebenfalls Asymptotenlinie ist. Ist nun c'_r und c'_l irgend eine weitere Lage von c_r und c_l , so kann die Fläche wegen der Vertauschbarkeit der Rechts- und Linksschiebungen ebensogut durch die Schiebung der Kurven c_r und c'_l oder durch Schiebung der Kurven c_l und c'_r aneinander erzeugt werden. Da jedes dieser Paare im Kreuzungspunkte dieselbe Schmiegeebene aufweist, und auch die Werte der Torsion dieselben wie vorher sind, kann man den obigen Schluß auf die neuen Paare von Schubkurven ausdehnen und erhält damit das Ergebnis, daß tatsächlich alle Lagen c'_r von c_r und alle Lagen c'_l von c_l Asymptotenlinien der erzeugten Fläche sind. Da diese Asymptotenlinien aber allesamt die Torsion $\tau = +1$ bzw. -1 besitzen, hat die erzeugte Fläche die konstante Relativkrümmung $K = -1$ und ist damit tatsächlich eine Fläche der Klassen Φ_I , Φ_{II} bzw. Φ_{III} , deren Asymptotenlinien den involutorischen Bündeln (33) von linearen Komplexen angehören.

III. Analytische Darstellung der Flächen Φ_I , Φ_{II} , Φ_{III} .

6. Eine weitere einfache Konstruktion der Flächen Φ . Man könnte die analytische Darstellung der Flächen Φ direkt aus der letzten Konstruktion dieser Flächen als Schiebflächen des elliptischen, quasi-

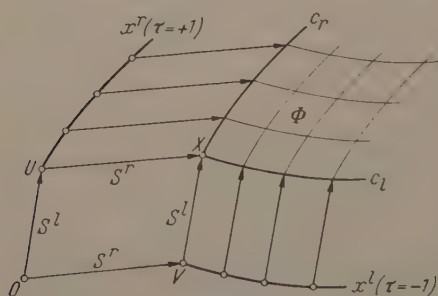


Fig. 1.

elliptischen und isotropen Raumes gewinnen. Damit identisch, aber rechnerisch etwas bequemer, ist die folgende **neue Erzeugungsweise der Flächen Φ** (Fig. 1):

Es seien I. im elliptischen, II. im quasielliptischen und III. im isotropen Raume als Grundkurven gegeben eine Kurve x^r der festen Torsion $\tau = +1$, die also in einem bestimmten Rechtsgewinde G_r (33) liegt, und eine Kurve x^l der Torsion $\tau = -1$ aus

einem Linksgewinde G_l (33). Verbinden wir dann den Nullpunkt O mit einem beliebigen Punkte U von x^r und V von x^l und ergänzen wir das Streckenpaar OU , OV durch einen Punkt X derart zu einem **CLIFFORDSchen Parallelogramm**, daß

UX rechtsparallel zu OV und VX linksparallel zu OU

ist, so wird, wenn U auf x^r und V auf x^l läuft, X eine **CLIFFORDSche Schiebfläche** beschreiben, deren Schiebkurven c_r und c_l zu x^r und x^l kongruent sind. Eine Fläche Φ der festen Relativkrümmung $K = -1$ entsteht dabei, wenn die involutorischen Gewinde G_r und G_l dem Nullpunkte O dieselbe Nullebene σ_0 zuweisen.

Tatsächlich entsteht nämlich der Punkt X aus U nach unserer Konstruktion auch durch die Rechtsschiebung S^r , welche O nach V bringt, und ebenso entsteht X aus V auch durch die Linksschiebung S^l , welche O nach U bringt. Bei festem V beschreibt also X auf der erzeugten Fläche eine zu x^r durch Rechtsschiebung S^r kongruente Kurve c_r und bei festem U eine zu x^l durch Linksschiebung S^l kongruente Kurve c_l . Die erzeugte Fläche entsteht also auch durch Rechtsschiebung der Kurve c_r längs c_l oder durch Linksschiebung von c_l längs c_r und ist damit wirklich eine CLIFFORDSche Schiebfläche. Eine Fläche Φ der festen Relativkrümmung $K = -1$ ist sie aber erst dann, wenn die Kurven c_r und c_l in ihrem Kreuzungspunkte X dieselbe Schmiegeebene besitzen. Das ist aber bei unserer Konstruktion immer dann der Fall, wenn die Gewinde G_r und G_l der involutorischen Bündel (33), in denen die Grundkurven x^r und x^l enthalten sind, dem Nullpunkte O dieselbe Nullebene σ_0 zuordnen. Tatsächlich geht diese Nullebene σ_0 von O durch die Linksschiebung S^l zunächst in die Nullebene σ^r von U bezüglich des Rechtsgewindes G_r , d. h. in die Schmiegeebene von x^r über und diese wieder durch die Rechtsschiebung S^r in die Schmiegeebene σ_r von c_r im Punkte X . Ebenso entsteht aus σ_0 durch die Rechtsschiebung S^r die Nullebene σ^l von V bezüglich des Linksgewindes G_l , d. h. die Schmiegeebene von x^l , und daraus wieder entsteht durch die Linksschiebung S^l die Schmiegeebene σ_l von c_l . Da aber die Schiebungen S^r und S^l vertauschbar sind, entsteht auf beiden Wegen aus σ_0 dieselbe Ebene $\sigma = \sigma_r = \sigma_l$, d. h. die Schubkurven c_r und c_l haben tatsächlich in ihrem Kreuzungspunkte X dieselbe Schmiegeebene, wenn der Nullpunkt O in den Gewinden G_r und G_l dieselbe Nullebene σ_0 besitzt.

Wir haben so aus der neuen Erzeugungsart der Flächen Φ die alte hergeleitet. Aber auch das Umgekehrte ist leicht möglich; dazu müßte man nur eine der Bewegungen (26) unserer Räume, welche den Punkt X in den Nullpunkt O überführen, in CLIFFORDSche Schiebungen (25) zerspalten. Das ist stets möglich, ja man kann es sogar (auf ∞^1 Arten) so einrichten, daß dabei die gemeinsame Schmiegeebene σ der Schubkurven c_r und c_l in eine vorgegebene Ebene σ_0 des Nullpunktes O übergeht. Damit ist dann gezeigt, daß man jede Fläche Φ durch unsere neue Konstruktion erhalten kann, wobei es noch erlaubt ist, die Gewinde G_r und G_l , in denen die Grundkurven x^r und x^l der neuen Erzeugung enthalten sein sollen, beliebig aus den involutorischen Bündeln (33) zu wählen (natürlich mit der Einschränkung, daß sie in O dieselbe Nullebene σ_0 haben). Von dieser letzten Freiheit werden wir sofort einfachen Gebrauch machen.

Wie die Formeln (33) zeigen, kommt im elliptischen Raume sowohl, als auch im quasielliptischen und isotropen Raume unter den ver-

zeichneten involutorischen Rechts- und Linksgewinden das Paar der Gewinde

(36)

$$G_r \dots p_{03} - p_{12} = 0$$

$$G_l \dots p_{03} + p_{12} = 0$$

vor. Beide Gewinde weisen dem Nullpunkte $O = (1, 0, 0, 0)$ dieselbe Nullebene, nämlich die Ebene

(37)

$$\sigma_0 \dots x_3 = 0$$

zu. Man kann sie daher als Grundgewinde für die Konstruktion der allgemeinsten Flächen Φ_I , Φ_{II} und Φ_{III} nehmen, deren analytischer Darstellung wir uns nun zuwenden.

7. Allgemeine analytische Darstellung der Flächen Φ_I , Φ_{II} , Φ_{III} .

Es seien

(38)

$$x^r = x^r(u) \quad x^l = x^l(v)$$

zwei beliebige durch die Parameter u und v beschriebene *Gewindekurven der involutorischen Gewinde* (36), d. h. zwei Kurven der Torsionen $\tau = +1$ bzw. -1 . Wir denken uns in (38) ihre homogenen Koordinaten wieder zu Quaternionen der Typen (24), (27) und (28) zusammengefaßt. Dem Nullpunkte O ist dann die „Eins“ dieser Quaternionensysteme, d. h. die Zahl e_0 zugeordnet. Dann ist $a = x^r(u)$ die Quaternion der Linksschiebung (25_l), welche den Nullpunkt O in die einzelnen Punkte U von x^r überführt, und ebenso $b = x^l(v)$ die Quaternion der Rechtsschiebung (25_r), welche O in die Punkte von x^l bringt. Wenn man beide Schiebungen nacheinander (in irgend einer Reihenfolge) auf den Nullpunkt O anwendet, so erhält man die Punkte

(39)

$$x = x^r(u) \cdot e_0 \cdot x^l(v) = x^r(u) \cdot x^l(v),$$

welche nach unserer neuen Konstruktion die Fläche Φ bilden.

Damit haben wir als drittes Hauptergebnis dieser Arbeit die folgende **einfache und einheitliche analytische Darstellung der Flächen Φ** gewonnen:

Die allgemeine Fläche Φ_I , Φ_{II} , Φ_{III} der festen Relativkrümmung $K = -1$ des elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raumes, d. h. (abgesehen von komplexen projektiven Umformungen) die allgemeine Fläche Φ , deren Asymptotenlinien beider Scharen in linearen Komplexen liegen, kann in diesen Räumen mit Hilfe der Quaternionensysteme (24), (27) und (28) durch das Quaternionenprodukt

(40)

$$x = x^r(u) \cdot x^l(v)$$

dargestellt werden, worin $x^r(u)$ und $x^l(v)$ beliebige Gewindekurven aus den involutorischen Gewinden (36) bedeuten.

Sind ausführlicher

$$(41) \quad \begin{aligned} x^r(u) &= x_0^r(u) \cdot e_0 + x_1^r(u) \cdot e_1 + x_2^r(u) \cdot e_2 + x_3^r(u) \cdot e_3 \\ x^l(v) &= x_0^l(v) \cdot e_0 + x_1^l(v) \cdot e_1 + x_2^l(v) \cdot e_2 + x_3^l(v) \cdot e_3 \end{aligned}$$

die Quaternionen der in G_r und G_l beliebig gewählten Gewindekurven, so erhält man die koordinatenmäßige Darstellung der von ihnen in den drei Räumen durch unsere Konstruktion erzeugten Flächen Φ , wenn man das Produkt dieser Quaternionen mittels der Produkttafeln (24), (27) und (28) ausführlich berechnet. Man findet so die folgenden Formeln:

I. Allgemeine Darstellung der Flächen Φ_I im elliptischen Raume:

$$(42) \quad \left. \begin{aligned} x_0 &= x_0^r x_0^l - x_1^r x_1^l - x_2^r x_2^l - x_3^r x_3^l \\ x_1 &= x_0^r x_1^l + x_1^r x_0^l + x_2^r x_3^l - x_3^r x_2^l \\ x_2 &= x_0^r x_2^l + x_2^r x_0^l + x_3^r x_1^l - x_1^r x_3^l \\ x_3 &= x_0^r x_3^l + x_3^r x_0^l + x_1^r x_2^l - x_2^r x_1^l \end{aligned} \right\} \Phi_I.$$

II. Allgemeine Darstellung der Flächen Φ_{II} im quasi-elliptischen Raume:

$$(43) \quad \left. \begin{aligned} x_0 &= x_0^r x_0^l - x_1^r x_1^l \\ x_1 &= x_0^r x_1^l + x_1^r x_0^l \\ x_2 &= x_0^r x_2^l + x_2^r x_0^l + x_3^r x_1^l - x_1^r x_3^l \\ x_3 &= x_0^r x_3^l + x_3^r x_0^l + x_1^r x_2^l - x_2^r x_1^l \end{aligned} \right\} \Phi_{II}.$$

III. Allgemeine Darstellung der Flächen Φ_{III} im isotropen Raume:

$$(44) \quad \left. \begin{aligned} x_0 &= x_0^r x_0^l \\ x_1 &= x_0^r x_1^l + x_1^r x_0^l \\ x_2 &= x_0^r x_2^l + x_2^r x_0^l \\ x_3 &= x_0^r x_3^l + x_3^r x_0^l + x_1^r x_2^l - x_2^r x_1^l \end{aligned} \right\} \Phi_{III}.$$

Man kann die allgemeinen Gewindekurven $x^r(u)$ und $x^l(v)$ der Gewinde G_r und G_l (36) auf viele Arten integrallos darstellen, z. B. indem man setzt

$$(45) \quad \left. \begin{aligned} x_0^r &= 1 \\ x_1^r &= -u \\ x_2^r &= U'(u) \\ x_3^r &= 2U(u) - u \cdot U'(u) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_0^l &= 1 \\ x_1^l &= v \\ x_2^l &= -V'(v) \\ x_3^l &= -2V(v) + v \cdot V'(v) \end{aligned}$$

Dieser Darstellung entziehen sich nur die Gewindestrahlen in den Ebenen $x_1 = c \cdot x_0$.

Folglich kann man auch alle Flächen Φ , deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören, ohne Integralzeichen darstellen. Bringt man sie durch unsere komplex-projektiven Umformungen auf die Normgestalt der Flächen Φ_I , Φ_{II} und Φ_{III} , so erhält man (durch Eintragen der Formeln (45) in die drei vorhergehenden) die folgenden **integrallosen Darstellungen der Flächen Φ , deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören:**

I. Integrallose Darstellung der Flächen Φ_I :

$$(46) \quad \left. \begin{aligned} x_0 &= (1 + uv)(1 + U'V') + 2U(V - v \cdot V') + 2V(U - u \cdot U') \\ x_1 &= (v - u)(1 + U'V') + 2(UV' - VU') \\ x_2 &= (1 - uv)(U' - V') + 2(Uv - V'u) \\ x_3 &= 2(U - V) - (u + v)(U' - V') \end{aligned} \right\} \Phi_I.$$

II. Integrallose Darstellung der Flächen Φ_{II} :

$$(47) \quad \left. \begin{aligned} x_0 &= 1 + uv \\ x_1 &= v - u \\ x_2 &= (1 - uv)(U' - V') + 2(Uv - V'u) \\ x_3 &= 2(U - V) - (u + v)(U' - V') \end{aligned} \right\} \Phi_{II}.$$

III. Integrallose Darstellung der Flächen Φ_{III} :

$$(48) \quad \left. \begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= v - u \\ x_2 &= U' - V' \\ x_3 &= 2(U - V) - (u + v)(U' - V') \end{aligned} \right\} \Phi_{III}.$$

Diese Formeln stellen nur dann keine Fläche (sondern bloß eine Gerade) dar, wenn $x^r(u)$ und $x^l(v)$ selber Geraden sind und zwar solche, bei denen die durch den Nullpunkt gezogene Rechtsparallele von x^r und die Linksparelle von x^l identisch sind. Geraden entstehen bei unseren Parameterdarstellungen (45), wenn man $U(u)$ und $V(v)$ als quadratische Polynome wählt. In dem genannten Ausnahmefall sind gewisse Beziehungen zwischen deren Koeffizienten erfüllt, die man am einfachsten mit Hilfe der Gleichungen (32) gewinnen kann, auf deren Angabe wir aber verzichten wollen.

Wir haben mit diesen ganz einheitlichen integrallosen Darstellungen der Flächen Φ auch das letzte Hauptergebnis dieser Arbeit gewonnen.

8. Sonderfälle. Natürlich ist auch der Fall der Netzflächen in unseren geometrischen Konstruktionen und analytischen Formeln enthalten. Es genügt ja, als Schiebkurve c_r eine krumme Kurve der

Torsion $\tau = +1$ und als Schiebkurve c_l einen Schmiegestrahl dieser Kurve zu nehmen, um durch ihre CLIFFORDSche Schiebung aneinander eine Netzfläche zu erhalten, auf der die Lagen von c_r und des Schmiegestrahls c_l Asymptotenlinien sind, die allesamt linearen Komplexen angehören.

Von Interesse ist dabei der Fall, daß beide Schiebkurven c_r und c_l geradlinig sind. Dann erhält man als Erzeugnis eine CLIFFORDSche Fläche, d. h. eine Quadrik, auf der die Erzeugenden jeder Schar im CLIFFORDSchen Sinne parallel sind, und welche daher das Maßgebilde des Raumes nach einem windschiefen Erzeugendenvierseit (oder einem Grenzfall davon) schneidet. Der letzte Fall tritt stets im isotropen Raume ein.

Natürlich kann man den Fall der Netzflächen sowohl wie den der CLIFFORDSchen Flächen auch durch unsere modifizierte Konstruktion erzielen. Man muß dann nur eine der beiden Gewindekurven x' oder x'' oder beide geradlinig wählen.

Von Bedeutung sind die beiden folgenden Anwendungen davon. Ersetzen wir auf einer unserer Flächen Φ , die durch Schiebung der beiden Asymptotenlinien c_r und c_l aneinander erzeugt sind, eine der erzeugenden Kurven durch ihre Tangente t_r oder t_l im Kreuzungspunkte P dieser Kurven, so entsteht eine Netzfläche $N(u)$ oder $N(v)$, die von den Asymptotenrichtungen der Fläche Φ längs einer Asymptotenlinie u bzw. v dieser Fläche gebildet wird. Diese Netzflächen $N(u)$ und $N(v)$ kennen wir aus Nr. 1 und Nr. 2; sie bilden den Ausgangspunkt unseres Studiums der Flächen Φ . Man kann sie, wie wir jetzt erkennen, sowohl durch Schiebung einer Asymptotenrichtung längs einer Asymptotenlinie als auch durch Schiebung einer Asymptotenlinie längs einer Asymptotenrichtung erhalten. Die letzte Möglichkeit war seinerzeit der Ausgangspunkt für die Erzeugung unserer Flächen Φ durch windschiefe Schiebung der Asymptotenlinien aneinander.

Ersetzen wir schließlich in einem Flächenpunkte $P = (u, v)$ von Φ beide Asymptotenlinien durch die dort berührenden Asymptotenrichtungen, so entsteht durch deren Schiebung aneinander eine CLIFFORDSche Fläche, welche die Flächen Φ , $N(u)$ und $N(v)$ oskuliert, nämlich (wegen der stationären Berührung der Schmiegtangenten mit der Fläche) sowohl aus der Schar der längs u als auch aus den längs v berührenden Asymptotenrichtungen drei benachbarte Geraden als Erzeugende enthält. Diese CLIFFORDSche Fläche ist also mit der LIESchen Quadrik $\mathcal{A}$ des Flächenpunktes P identisch.

Will man (z. B. zum Zwecke ihrer analytischen Darstellung nach obigen Formeln) die berührenden Netzflächen aus Schmiegtangenten $N(u)$ und $N(v)$ oder die LIESche Quadrik $\mathcal{A}$ auch nach der zweiten Art der Konstruktion ermitteln, so hat man einfach eine der Kurven x' oder x'' (oder beide) durch ihre Tangenten t' bzw. t'' zu ersetzen.

Wir sind damit im Nachhinein auf sehr einfache und anschauliche Art bei unseren Flächen Φ in den Besitz der LIESCHEN Quadrik gekommen, die bisher beim Studium dieser interessanten Flächenklasse seit LIE¹⁾ den Ausgangspunkt der Überlegungen bildete. Bei LIE stellen diese Flächen Φ , deren Asymptotenlinien allesamt linearen Komplexen angehören, eigentlich die erste Anwendung der nach ihm benannten Quadrik dar. Man benützte sie in der Theorie dieser Flächen bisher, um den Satz zu gewinnen, daß die Leitgeraden der Netzflächen $N(u)$ und $N(v)$, welche man den Flächen Φ längs ihren Asymptotenlinien u, v umschreiben kann, sich wechselseitig schneiden. Wir haben diesen Satz in Nr. 3 aber viel elementarer gewinnen können, indem wir die Tatsache benutzten, daß bei zwei vertauschbaren windschiefen Kollineationen A und B die Achsen einer jeden dieser Kollineationen Bahngeraden der anderen sind.

Unsere allgemeinen Ergebnisse enthalten u. a. die vollständige Antwort auf die mehrfach aufgeworfene Frage nach den Flächen, deren sämtliche Asymptotenlinien kubische Raumkurven sind. Da nämlich kubische Raumkurven stets linearen Komplexen angehören, sind diese Flächen unter den Flächen Φ enthalten und können durch unsere Konstruktionen einfach dadurch erhalten werden, daß man als Kurven $x''(u)$ und $x'(v)$ kubische Gewindekurven der involutorischen Gewinde (36) wählt. Bei unseren komplex-projektiven Normierungen können die Flächen dann noch, je nachdem man im elliptischen, quasielliptischen oder isotropen Raume operiert, den Klassen Φ , Φ_{II} oder Φ_{III} angehören. In jedem Falle aber sind sie CLIFFORDSche Schiebflächen ihrer kubischen Asymptotenlinien.

Welchen Fortschritt diese einfache Lösung des Problems gegenüber den bisherigen bedeutet, erkennt man durch Vergleich z. B. mit den Ergebnissen einer Arbeit von E. P. LANE und M. L. MACQUEEN¹⁶⁾. Nach diesen beiden Autoren hängt die allgemeine Fläche mit kubischen Asymptotenlinien von der Lösung einer (gewöhnlichen) Differentialgleichung 5. Ordnung ab, deren Integration begreifliche Schwierigkeiten bietet. Von einer allgemeinen geometrischen Lösung des Problems, wie sie jetzt möglich ist, konnte bisher überhaupt nicht die Rede sein.

9. Realitätsfragen. Es sei zum Schlusse ausdrücklich betont, daß unsere komplex-projektiven Normierungen natürlich gewisse Realitätsverschiebungen der Flächen Φ zur Folge haben können. Stellt man sich auf den Standpunkt der reellen projektiven Geometrie, so wird es daher zweckmäßig sein, unsere analytischen Formeln noch derart zu ergänzen, daß jede reelle Fläche Φ mit Asymptotenlinien, die linearen Komplexen angehören, unter den aufgestellten Normalflächen auch einen reellen Vertreter besitzt.

Die notwendigen Ergänzungen betreffen offenbar nur die beiden Möglichkeiten, daß die involutorischen Gewindebündel, denen die Asym-

ptotenlinien der Flächen Φ angehören, als gemeinsamen Durchschnitt I'. auch zwei ergänzende Regelscharen aus reellen Erzeugenden und II'. auch zwei ergänzende Paare verschränkter Strahlbüschel mit gleichfalls reellen Strahlen besitzen können.

Wir erhalten diese beiden neuen Fälle aus unseren Normaltypen I und II in Nr. 4, indem wir auf sie z. B. die *komplexe Kollineation*

$$(49) \quad x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_0 : i x_1 : i x_2 : x_3$$

ausüben. Dadurch geht

I'. die nullteilige Quadrik (14) in die *Quadrik*

$$(50) \quad x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$$

über, deren Erzeugenden reell sind, und

II'. die beiden konjugiert-komplexen verschränkten Strahlbüschelpaare (15) werden in *verschränkte Paare reeller Strahlbüschel* verwandelt, deren Ebenen das reelle Ebenenpaar

$$(51) \quad x_0^2 - x_1^2 = 0$$

und deren Scheitel das reelle Punktepaar

$$(51') \quad -u_2^2 + u_3^2 = 0$$

bilden. Man könnte, worauf wir hier nicht näher eingehen wollen, natürlich auch auf diese Figuren (49) und (50) nicht-euklidische Metriken gründen, die dann indefinite Gegenstücke der elliptischen und quasielliptischen Metrik wären.

Die CLIFFORDSchen Schiebungen in diesem indefiniten elliptischen und quasielliptischen Raume können dann wieder durch die Formeln (25) und ihre Bewegungen durch (26) dargestellt werden; dabei genügen die jetzt auftretenden Quaternionen, deren Einheiten ebenfalls durch die Formeln (49) verwandelt werden,

I'. im indefiniten elliptischen Raume der Produkttafel:

$$(52) \quad \begin{array}{c|cccc} & \cdot e_0 & \cdot e_1 & \cdot e_2 & \cdot e_3 \\ e_0 \cdot & e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 \cdot & e_1 & e_0 & -e_3 & -e_2 \\ e_2 \cdot & e_2 & e_3 & e_0 & e_1 \\ e_3 \cdot & e_3 & e_2 & -e_1 & -e_0 \end{array}$$

II'. im indefiniten quasielliptischen Raume der Produkttafel:

$$(53) \quad \begin{array}{c|cccc} & \cdot e_0 & \cdot e_1 & \cdot e_2 & \cdot e_3 \\ e_0 \cdot & e_0 & e & e_2 & e_3 \\ e_1 \cdot & e_1 & e_0 & -e_3 & -e_2 \\ e_2 \cdot & e_2 & e_3 & 0 & 0 \\ e_3 \cdot & e_3 & e_2 & 0 & 0 \end{array}$$

Bei den jetzt entstehenden CLIFFORDSchen Links- bzw. Rechtsschiebungen (25) wandern die Punkte dieser Räume in den Fällen I' und II' in Linksnetzen und Rechtsnetzen, deren Gleichungen (Gegenstücke zu (32)) in der nachstehenden Form geschrieben werden können:

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Linksnetze:} \\ \text{I'. } \left\| \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ p_{01} + p_{23} & p_{02} + p_{31} & p_{03} - p_{12} \end{array} \right\| = 0 \\ \text{II'. } \left\| \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ p_{01} & p_{02} & p_{03} - p_{12} \end{array} \right\| = 0 \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Rechtsnetze:} \\ \left\| \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \\ p_{01} - p_{23} & p_{02} - p_{31} & p_{03} + p_{12} \end{array} \right\| = 0 \\ \left\| \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \\ p_{01} & p_{02} & p_{03} + p_{12} \end{array} \right\| = 0. \end{array} \right.$$

Man liest aus diesen Gleichungen sofort die beiden *involutorischen Bündel linearer Komplexe* ab, als deren Singularitätengebilde (oder Durchschnitt) die Regelscharen und Strahlbüschel von (50) und (51) aufzufassen sind. Ähnlich wie bei den Formeln (33) ist die Liniengleichung dieser Gewinde wieder eine lineare Verbindung der in den zweiten Zeilen der Matrizen stehenden Kombinationen der Linienkoordinaten, nämlich für die

$$(55) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Linksgewinde } G'_l: \\ \text{I. } u_1(p_{01} + p_{23}) + u_2(p_{02} + p_{31}) + u_3(p_{03} - p_{12}) = 0, \\ \text{II. } u_1 p_{01} + u_2 p_{02} + u_3(p_{03} - p_{12}) = 0. \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Rechtsgewinde } G'_r: \\ v_1(p_{01} - p_{23}) + v_2(p_{02} - p_{31}) + v_3(p_{03} + p_{12}) = 0, \\ v_1 p_{01} + v_2 p_{02} + v_3(p_{03} + p_{12}) = 0. \end{array} \right.$$

Man entnimmt diesen Formeln, daß in diesen Gewindebündeln in beiden Fällen vorkommen das spezielle

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Rechtsgewinde } G'_r \\ p_{03} + p_{12} = 0 \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Linksgewinde } G'_l \\ p_{03} - p_{12} = 0, \end{array} \right.$$

die zueinander involutorisch liegen und beide dem Nullpunkte O dieselbe Nullebene $x_3 = 0$ zuordnen. (Es sind das dieselben Gewinde wie in (36), nur mit vertauschten Rollen.)

Wir können die beiden involutorischen Gewinde (56) also wieder für die zweite Konstruktion der Flächen Φ verwenden, deren Asymptotenlinien den linearen Komplexen der involutorischen Bündel (55) angehören. Wir wollen diese Flächen, die sich von den Flächen Φ_I und Φ_{II} nur durch Realitätsverschiebungen unterscheiden mit Φ'_I und Φ'_{II} bezeichnen. Bedeutet dann wieder (38) die Darstellung einer beliebigen Kurve $x^r(u)$ bzw. $x^l(v)$ aus dem Rechtsgewinde G'_r bzw. Linksgewinde G'_l (56), so erhalten wir als Darstellung dieser Flächen Φ'_I bzw. Φ'_{II} wieder die Quaternionenformel (39):

(57)

$$x = x^r(u) \cdot x^l(v),$$

wobei jetzt die Quaternionen (41) im Sinne der Produkttafeln (52) bzw. (53) zu verstehen sind. Führt man das Produkt aus, so erhält man leicht die folgende koordinatenmäßige Darstellung der Flächen Φ'_I und Φ'_{II} :

I. Allgemeine Darstellung der Flächen Φ'_I im indefiniten-elliptischen Raume:

$$(58) \quad \left. \begin{aligned} x_0 &= x_0^r x_0^l + x_1^r x_1^l + x_2^r x_2^l - x_3^r x_3^l \\ x_1 &= x_0^r x_1^l + x_1^r x_0^l + x_2^r x_3^l - x_3^r x_2^l \\ x_2 &= x_0^r x_2^l + x_2^r x_0^l + x_3^r x_1^l - x_1^r x_3^l \\ x_3 &= x_0^r x_3^l + x_3^r x_0^l + x_2^r x_1^l - x_1^r x_2^l \end{aligned} \right\} \Phi'_I.$$

II'. Allgemeine Darstellung der Flächen Φ'_{II} im indefiniten quasielliptischen Raume:

$$(59) \quad \left. \begin{aligned} x_0 &= x_0^r x_0^l + x_1^r x_1^l \\ x_1 &= x_0^r x_1^l + x_1^r x_0^l \\ x_2 &= x_0^r x_2^l + x_2^r x_0^l + x_3^r x_1^l - x_1^r x_3^l \\ x_3 &= x_0^r x_3^l + x_3^r x_0^l + x_2^r x_1^l - x_1^r x_2^l \end{aligned} \right\} \Phi'_{II}.$$

Natürlich kann man auch für diese Flächen ohne weiteres integralfreie Darstellungen angeben. Zu dem Zwecke kann man z. B. von den folgenden integrallosen Darstellungen der Kurven $x^r(u)$ und $x^l(v)$ der Gewinde G_r bzw. G'_l (56) ausgehen:

$$(60) \quad \left. \begin{aligned} x_0^r &= 1 \\ x_1^r &= u \\ x_2^r &= -U'(u) \\ x_3^r &= -2U(u) + u \cdot U'(u) \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} x_0^l &= 1 \\ x_1^l &= -v \\ x_2^l &= V'(v) \\ x_3^l &= 2V(v) - v \cdot V'(v) \end{aligned} \right\}$$

Setzt man diese Koordinaten in die Formeln (58) und (59) ein, so erhält man als

I'. integrallose Darstellung der Flächen Φ'_I :

$$(61) \quad \left. \begin{aligned} x_0 &= (1 - uv)(1 - U'V') + 2U(V - v \cdot V') + 2V(U - u \cdot U') \\ x_1 &= (u - v)(1 - U'V') + 2(UV' - U'V) \\ x_2 &= (1 + uv)(V' - U') + 2(Uv - Vu) \\ x_3 &= 2(V - U) + (u + v)(U' - V') \end{aligned} \right\} \Phi'_I.$$

II'. integrallose Darstellung der Flächen Φ'_{II} :

$$(62) \quad \left. \begin{aligned} x_0 &= 1 - uv \\ x_1 &= u - v \\ x_2 &= (1 + uv)(V' - U') + 2(Uv - Vu) \\ x_3 &= 2(V - U) + (u + v)(U' - V') \end{aligned} \right\} \Phi'_{II}.$$

Jede reelle Fläche Φ , deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören, findet jetzt unter den Flächen der Normalformen Φ_I , Φ'_I , Φ_{II} , Φ'_{II} und Φ_{III} (die der Reihe nach dem gewöhnlichen und indefiniten elliptischen, dem gewöhnlichen und indefiniten quasielliptischen und dem isotropen Raume angehören), einen reellen Vertreter, der mit ihr auf reelle projektive Art verwandt ist. Alle diese Flächen können in den genannten Räumen durch CLIFFORDSche Schiebungen ihrer Asymptotenlinien $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ aneinander erzeugt werden.

Schrifttumsnachweis.

- 1) S. LIE, Untersuchungen über Differentialgleichungen I. Christ. Forh., Aar 1882. N. 21, Christiania 1883, = Ges. Abhandlungen III. Bd., S. 537—546.
- 2) Vgl. hierzu auch die Bemerkungen von F. ENGEL, ebenda S. 754 ff., wo sich auch ein Beweis des LIESchen Satzes findet.
- 3) A. PETER, Die Flächen, deren Haupttangentenkurven linearen Komplexen angehören. Inaug.-Diss. Leipzig 1895, 87 S.
- 4) E. KÉRAVAL, Sur les surfaces dont lignes asymptotiques appartiennent par leurs tangentes à un complexe linéaire Bull. soc. math. France. **39** (1911), S. 134—155.
- 5) CH. T. SULLIVAN, Properties of surfaces whose asymptotic curves belong to linear complexes, Transact. Amer. Math. Soc. **15** (1914), S. 167—196.
- 6) A. TERRACINI, Sulle superficie, le cui asintotiche dei due sistemi sono cubiche sghembe; Atti della soc. dei natural. e matem. di Modena (5) **5** (1919/20), S. 82—107.
- 7) G. FUBINI-E. FÉCH, Geometria proiettiva differenziale I. II. Cap. V (Bologna 1927) und A. TERRACINI, Sulle superficie aventi un sistema, o entrambi, di asintotiche in complessi lineari, ebenda Appendice IV^a.
- 8) L. BIANCHI, Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica. Annali di mat. (2) **24** (1896), S. 93—129.
- 9) W. BLASCHKE, Ebene Kinematik, § 15 (Leipzig-Berlin 1938).
- 10) K. STRUBECKER, Differentialgeometrie des isotropen Raumes: I. Theorie der Raumkurven, Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien, Abt. II a **150** (1941), S. 1—53. — II. Die Flächen konstanter Relativkrümmung $K = rt - s^2$, Math. Zeitschrift **47** (1942), S. 743—777. — III. Flächentheorie, Ebenda **48** (1942), S. 369—427. — IV. Theorie der flächentreuen Abbildungen der Ebene, Ebenda **50** (1944), S. 1—92. — V. Zur Theorie der Eiliniien, Ebenda **51** (1949), S. 525—573.
- 11) K. STRUBECKER, Über die Flächen, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören, Anzeiger Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Klasse, vom 23. Oktober 1941.

- 12) E. STUDY, Von den Bewegungen und Umlegungen, Math. Ann. **39** (1891), S. 441—566. — Vgl. W. BLASCHKE, Euklidische Kinematik und nicht-euklidische Geometrie, Zeitschrift f. Math. u. Phys. **60** (1911), S. 61—91 und S. 203—204, und K. STRUBECKER, Direkte Herleitung der Darstellung der Bewegungen der Ebene durch STUDYSche Quaternionen, Monatshefte Math. Phys. **47** (1939), S. 213—216.
- 13) K. STRUBECKER, Über die LIESCHEN Abbildungen der Linienelemente der Ebene auf die Punkte des Raumes. (Ein Beitrag zur Kinematik der Minimal-ebene), Monatshefte Math. Phys. **42** (1935), S. 309—376. — Beiträge zur Geometrie des isotropen Raumes, Journal f. reine u. angew. Mathematik **178** (1938), S. 135—173.
- 14) Als zusammenfassende Darstellungen erwähnen wir:
 L. BIANCHI, Lezioni di geometria differenziale, 3. Aufl. Pisa 1923, t. 2, cap. 26. —
 J. L. COOLIDGE, The elements of non-Euclidean geometry, Oxford 1909. — W. BLASCHKE, Nicht-Euklidische Geometrie und Mechanik I, II, III, Leipzig-Berlin 1942.
- 15) W. BLASCHKE, Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Affine Differentialgeometrie, bearbeitet von K. REIDEMEISTER, Berlin 1923, S. 216. — Weitere Literaturangaben über diese Flächen sind in K. STRUBECKER, Zum CAUCHYSCHEN Problem der Differentialgleichung $rt - s^2 = K$, D. Math. **6** (1942), S. 507 zusammengestellt.
- 16) E. P. LANE and M. L. MAC-QUEEN, Surfaces whose asymptotic curves are twisted cubics, Amer. Journ. Math. **60** (1938), S. 337—344.

(Eingegangen am 13. Juli 1949.)

Über die meromorphen Lösungen der Differenzengleichung $F(z+1) = \frac{R_1(z) F(z) + R_2(z)}{F(z) + R_3(z)}$ mit rationalen $R_v(z)$.

Von

Hans Töpfer in Solingen.

Inhalt.

	Seite
I. Übersicht	436
II. Allgemeines zur Lösung der Differenzengleichung $f(z+1) = H[z, f(z)]$ bzw. $g(z) = H[z, g(z+1)]$	439
§ 1. Sonderfälle	439
§ 2. Der Allgemeinfall	441
III. Die Lösung der Differenzengleichung $F(z+1) = \frac{R_1(z) F(z) + R_2(z)}{F(z) + R_3(z)}$..	455
§ 1. Eine meromorphe Lösung der Differenzengleichung $f(z+1) = \frac{R(z)}{1+f(z)}$ mit rationalem $R(z)$	455
§ 2. Reduktion der Differenzengleichung $F(z+1) = \frac{R_1(z) F(z) + R_2(z)}{F(z) + R_3(z)}$..	465
IV. Der Zusammenhang zwischen der Differenzengleichung $F(z+1) = \frac{R_1(z) F(z) + R_2(z)}{F(z) + R_3(z)}$ und homogenen Differenzengleichungen zweiter Ordnung	468
V. Literaturverzeichnis	471

I. Übersicht.

1. Gegeben sei die für alle endlichen komplexen Zahlen v und w meromorphe Funktion $H(v, w)$; gesucht werden die meromorphen Lösungen (oder wenigstens eine dieser Lösungen) der Differenzengleichung

$$(1) \quad \begin{cases} f(z+1) = H[z, f(z)] \\ \text{bzw.} \quad g(z) = H[z, g(z+1)]. \end{cases}$$

Dieses Problem ist in den Sonderfällen

$$\frac{\partial H}{\partial v} \equiv 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial H}{\partial w} \equiv 0$$

unter II, § 1 behandelt, wo der erste Fall unter Anwendung der ABELschen, SCHRÖDERSchen bzw. BÖTTCHERSchen Funktionalgleichung mittels des Prinzips der Vorzugslösung erledigt wird.

Größer sind die Schwierigkeiten im allgemeinen Fall: Falls die in z meromorphe und im allgemeinen von den natürlichen Zahlen n abhängende Funktion $\kappa(z, n)$ bzw. $\lambda(z, n)$ gewissen Bedingungen genügt, so ist

$$(2) \quad \begin{cases} f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} H\{z-1, H\{z-2, H\{z-3, \dots, H\{z-n, \kappa(z, n)\}\}\}\} \\ \text{bzw. } g(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} H\{z, H\{z+1, H\{z+2, \dots, H\{z+n, \lambda(z, n)\}\}\}\} \end{cases}$$

eine meromorphe Lösung von (1). Unter II, § 2 werden in Satz 1 hinreichende Bedingungen für $\kappa(z, n)$ bzw. $\lambda(z, n)$ zur Konvergenz von (2) angegeben. Satz 1a gibt eine Verschärfung des Satzes 1, die auf die Differenzengleichung (3) zugeschnitten ist; dies wird benötigt, da Satz 1 selber für einige Fälle der Differenzengleichung (3) nicht ausreicht. Der wesentliche Beweisgedanke bei Satz 1 und 1a liegt darin, die Funktionenfolgen (2) unter den für $\kappa(z, n)$ bzw. $\lambda(z, n)$ angesetzten Bedingungen als Normalfolgen¹⁾ darzutun.

Die Sätze 1 und 1a werden in dieser Arbeit nur bei der Behandlung der Differenzengleichung (3) angewandt. Ihr Anwendungsbereich ist natürlich damit längst nicht erschöpft. Darauf soll aber außer unter 9. nicht weiter eingegangen werden. Dort wird ein Beispiel angegeben, das von STEPHENS²⁾ nach einer anderen Methode erledigt wurde; seine Ergebnisse unterliegen jedoch gewissen Einschränkungen, die hier nicht nötig sind. Darüber hinaus kann hier jenes Beispiel in wesentlich allgemeinerer Fassung gelöst werden.

2. Der engere Zweck der vorliegenden Arbeit ist die Behandlung der Differenzengleichung

$$(3) \quad F(z+1) = \frac{R_1(z)F(z) + R_2(z)}{F(z) + R_3(z)},$$

wobei die $R_v(z)$ rationale Funktionen von z sind. Bekanntlich³⁾ wird eine meromorphe Lösung von (3) nur im trivialen Falle zugleich auch einer algebraischen Differentialgleichung genügen. Die hier gewonnenen Funktionen sind also von besonders interessantem Charakter.

Unter III, § 1 wird die Lösung der Differenzengleichung

$$(4) \quad f(z+1) = \frac{R(z)}{1+f(z)}$$

für rationales $R(z)$ beschrieben. Diese Gleichung kann nach dem unter II angegebenen Verfahren behandelt werden. Es ergibt sich ein Näherungsverfahren (2), bei dem von Kettenbruchfolgen Gebrauch gemacht wird. Von der Methode ausgeschlossen bleibt allein der Fall

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = -\frac{1}{4}.$$

¹⁾ siehe z. B. MONTEL [3].

²⁾ siehe STEPHENS [5].

³⁾ siehe TIETZE [9], STRIDSBERG [6], MASON [1].

In einigen Sonderfällen konvergiert die Entwicklung zumindest in einer Halbebene, im allgemeinen jedoch in der vollen komplexen Zahlenebene gegen eine meromorphe Funktion $f(z)$. Die Ergebnisse sind in den Sätzen 2a ($R(z)$ regulär bei ∞) und 2b (Pol bei ∞) zusammengefaßt.

Unter III, § 2 wird der allgemeine Fall (3) auf den Fall (4) reduziert. Ich fand diese Reduktion auf einem wegen seines Umfanges hier nicht näher beschriebenen Wege, der von einer Verallgemeinerung der SCHRÖDERSCHEN Funktionalgleichung (7) Gebrauch macht. Diese Verallgemeinerung bietet wahrscheinlich — das bedarf jedoch noch einer näheren Untersuchung — die Möglichkeit, beim Problem (1) eine ähnlich einfache Lösung anzugeben, wie (8) es für (6) ist. Die Richtigkeit der Reduktion sieht man, nachdem man sie einmal kennt, durch Nachrechnen ein. In den Sätzen 3a und 3b sind die Ergebnisse zusammengefaßt.

3. Unter IV wird das Ergebnis auf die homogene Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$(5) \quad u(z+2) + p(z)u(z+1) + q(z)u(z) = 0$$

mit rationalem $p(z)$ und $q(z)$ angewandt. Die Funktion

$$\frac{u(z+1)}{u(z)}$$

wird dann durch eine Folge von Kettenbrüchen angenähert. Damit wird ein Vergleich mit dem THIELESCHEN Kettenbruchverfahren⁴⁾ nahegelegt. Im Falle einer normalen Differenzengleichung (5), bei welcher bekanntlich

$$\lim_{z \rightarrow \infty} p(z) = p \quad \text{und} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} q(z) = q$$

mit endlichem p und q existieren, gibt die THIELESCHES Methode zusammen mit der hier geschilderten ein mitunter sich gegenseitig ergänzendes Verfahren zur Angabe einer meromorphen Funktion $u(z+1)u^{-1}(z)$. Während aber das THIELESCHES Verfahren beim Konvergenzbeweis spezieller Sätze über das Verhalten der Funktion $u(z+1)u^{-1}(z)$ bedarf, beruht das in dieser Arbeit gebrachte Verfahren im wesentlichen auf der allgemeinen Theorie der Normalfolgen. Daher werden weit über den Geltungsbereich des THIELESCHEN Kettenbruchs hinaus alle Differenzengleichungen (5), abgesehen von dem Ausnahmefall

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{q(z)}{p^2(z)} = \frac{1}{4},$$

erfaßt. Die Kettenbrüche (58) konvergieren außer in diesem Sonderfall allgemein in der vollen Zahlenebene, in Ausnahmefällen mindestens in einer Halbebene gegen eine meromorphe Lösung der Funktion $u(z+1)u^{-1}(z)$.

⁴⁾ THIELE [7] und [8] sowie die Darstellung in Nörlund [4].

II. Allgemeines zur Lösung der Differenzengleichung

$$f(z+1) = H[z, f(z)] \quad \text{bzw.} \quad g(z) = H[z, g(z+1)].$$

§ 1. Sonderfälle.

4. Der Fall

$$\frac{\partial H}{\partial w} \equiv 0$$

ist trivial; bei ihm gibt es nur eine Lösung

$$f(z) \equiv H(z-1) \quad \text{bzw.} \quad g(z) \equiv H(z).$$

Falls

$$\frac{\partial H}{\partial v} \equiv 0,$$

so ist die Gleichung

$$(6) \quad f(z+1) = H[f(z)] \quad \text{bzw.} \quad g(z) = H[g(z+1)]$$

zu lösen. Hier soll ein Weg angegeben werden, über den man zu einer „Vorzugslösung“ dieser Differenzengleichung gelangen kann, die durch besondere geometrische Eigenschaften ausgezeichnet ist. Es ist dies ein Analogon zur NÖRLUNDSchen „Hauptlösung“⁵⁾, die zunächst nicht auf geometrische, sondern auf analytische Grundsätze gestellt ist. Es wird also der Versuch unternommen, das alte Problem von der geometrischen Funktionentheorie her anzufassen. Die Grundlage hierzu gibt das „*Prinzip der Vorzugslösung*“:

Bei der Möglichkeit einer Auswahl verschiedener funktionentheoretischer Zusammenhänge wird (indem man eine Normierung mittels linearer Funktionen in Gegenstands- und Bildebene außer Belang stellt) derjenige als „Vorzugslösung“ bezeichnet, bei dem gewisse, durch möglichst wenige Kreisstücke oder Kreise (Geradenstücke oder Geraden) berandete Gebiete (zum mindesten im Inneren) konform auf Gebiete ebenderselben Eigenschaft eineindeutig abgebildet werden.

Hat man einen Funktionszusammenhang nach dem Prinzip der Vorzugslösung gewonnen, so wird seine simultane Transformation vermittle einer meromorphen Funktion ebenfalls als „Vorzugslösung im weiteren Sinne“ bezeichnet.

5. Unter Anwendung dieses Prinzips zeigt man geometrisch leicht, daß die Vorzugslösung für

$$H(w) = w + N$$

mit

$$f(z) = Nz \quad \text{bzw.} \quad g(z) = -Nz$$

und die Gesamtheit aller Lösungen mit

$$\begin{cases} f(z) = Nz + \pi(z) \\ \text{bzw.} \quad g(z) = -Nz + \pi(z) \end{cases}$$

⁵⁾ siehe z. B. NÖRLUND [4].

gegeben ist, wobei $\pi(z)$ — wie im Folgenden stets — jede Funktion aus der Menge aller meromorphen Funktionen mit der Periode 1 sein kann. $\pi(z) \equiv 0$ führt auf die Vorzugslösung.

Weiter zeigt man geometrisch unter Anwendung des Prinzips der Vorzugslösung, daß

$$H(w) = Mw$$

die nicht identisch verschwindenden Vorzugslösungen

$$f(z) = M^z \quad \text{bzw.} \quad g(z) = M^{-z}$$

und die Lösungsgesamtheit

$$\begin{cases} f(z) = \pi(z) M^z \\ \text{bzw. } g(z) = \pi(z) M^{-z} \end{cases}$$

besitzt.

Der Fall

$$H(w) = Mw + N \quad (M \neq 1)$$

wird mit

$$\begin{cases} f(z) = \pi(z) M^z + \frac{N}{1-M} \\ \text{bzw. } g(z) = \pi(z) M^{-z} + \frac{N}{1-M} \end{cases}$$

gelöst, wobei $\pi(z) \equiv 1$ auf die Vorzugslösung und $\pi(z) \equiv 0$ auf die triviale konstante Lösung führt.

6. Nach diesen Vorbereitungen läßt sich der Fall (6) erledigen: Unmittelbar kann das Prinzip der Vorzugslösung keine Anwendung finden, da die Verhältnisse der Funktion $H(w)$ mehr oder weniger verwickelt sein mögen. Wenn man aber von der ABELSchen, SCHRÖDERschen oder BÖTTCHERSchen Transformation Gebrauch macht, werden die a priori schwer übersehbaren Verhältnisse weitgehend vereinfacht.

Ist $H(w)$ so beschaffen, daß in einem Gebiet der w -Ebene eine analytische ABELSche oder SCHRÖDERsche oder BÖTTCHERSche Funktion $A(w)$ oder $S(w)$ oder $B(w)$ existiert und die Funktionalgleichung

$$(7) \quad \begin{cases} A[H(w)] = A(w) + 1 \\ S[H(w)] = kS(w) \\ B[H(w)] = B(w)^l \end{cases}$$

(k und l konstant) erfüllt ist⁶, so ergibt sich die Vorzugslösung in folgender Weise: Z. B. ist mit der ABELSchen Funktion $A(w)$ eine Transformation gefunden, durch welche die gegebene Funktion $H(w)$ auf eine Translation zurückgeführt ist:

$$f(z+1) = H[f(z)]$$

⁶) Über die Existenz der Funktionen $A(w)$, $S(w)$, $B(w)$ und deren Eigenschaften siehe ausführliches Literaturverzeichnis bei TÖPFER [10]; dortselbst auch Untersuchungen über die Struktur jener Funktionen im Großen und Begründung der Bezeichnung „BÖTTCHERSche Funktion“.

oder

$$A[f(z+1)] = A[H(f(z))] = A[f(z)] + 1;$$

die Gesamtheit der Lösungen für $A[f(z)]$ ist nach oben:

$$A[f(z)] = z + \pi(z),$$

d. h.

$$f(z) = A_{-1}(z + \pi(z))$$

ist die gesuchte Gesamtheit der Lösungen von (6). Lösungen von (6) sind zusammengefaßt gegeben mit:

$$(8) \quad \begin{cases} f(z) = A_{-1}(z + \pi(z)) & \text{bzw. } g(z) = A_{-1}(-z + \pi(z)) \\ f(z) = S_{-1}(k^z + \pi(z)) & \text{bzw. } g(z) = S_{-1}(k^{-z} + \pi(z)) \\ f(z) = B_{-1}(l^{z \cdot \pi(z)}) & \text{bzw. } g(z) = B_{-1}(l^{l^{-z \cdot \pi(z)}}). \end{cases}$$

§ 2.

Der Allgemeinfall.

7. Der Ansatz (2) legt es nahe, zu verlangen, daß mit $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{cases} \kappa(z, n) \approx H[z - n - 1, \kappa(z, n + 1)] \\ \text{bzw. } \lambda(z, n) \approx H[z + n + 1, \lambda(z, n + 1)]; \end{cases}$$

hierbei ist mit dem Zeichen $\approx$ der Begriff „ungefähr gleich“ gemeint. Entsprechend ergibt sich aus (1):

$$\begin{aligned} f(z+1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} H\{z, H[z-1, \dots, H(z-n+1, \kappa(z+1, n))]\} \\ &= H\{z, \lim_{n \rightarrow \infty} H[z-1, \dots, H(z-n+1, \kappa(z+1, n))]\} \\ &= H\{z, f(z)\} = H\{z, \lim_{n \rightarrow \infty} H[z-1, \dots, H(z-n, \kappa(z, n))]\} \end{aligned}$$

oder für $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{cases} \kappa(z+1, n) \approx H[z-n, \kappa(z, n)] \\ \text{bzw. } \lambda(z, n) \approx H[z+n+1, \lambda(z+1, n)]. \end{cases}$$

8. *Vorausbedingungen*: Den Sätzen 1 und 1a liegen folgende Vorausbedingungen zugrunde:

Das unter 7. angegebene sei gewährleistet durch die Voraussetzung, daß in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ der z -Ebene die Grenzwerte

$$(9) \quad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H[z-n-1, \kappa(z, n+1)]}{\kappa(z, n)} = 1 \\ \text{bzw. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H[z+n+1, \lambda(z, n+1)]}{\lambda(z, n)} = 1 \end{cases}$$

und

$$(10) \quad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H[z-n, \kappa(z, n)]}{\kappa(z+1, n)} = 1 \\ \text{bzw. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H[z+n+1, \lambda(z+1, n)]}{\lambda(z, n)} = 1 \end{cases}$$

gleichmäßig existieren. Sicher ist

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} H\{z-n, H[z-n-1, \kappa(z, n+1)]\} \\ = H\left\{z-n, \kappa(z, n) \frac{H[z-n-1, \kappa(z, n+1)]}{\kappa(z, n)}\right\} = H\{z-n, \kappa(z, n)\xi\} \\ \text{bzw. } H\{z+n, H[z+n+1, \lambda(z, n+1)]\} \\ = H\left\{z+n, \lambda(z, n) \frac{H[z+n+1, \lambda(z, n+1)]}{\lambda(z, n)}\right\} = H\{z+n, \lambda(z, n)\xi\}, \end{array} \right.$$

wobei wegen (9) der von z und n abhängende Wert ξ für große n nahe bei $\xi = 1$ liegt.

Jetzt wird für die unabhängige Variable ξ definiert:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_n(z, \xi) = \frac{H[z-n, \kappa(z, n)\xi]}{\kappa(z, n-1)} \\ \text{bzw. } \psi_n(z, \xi) = \frac{H[z+n, \lambda(z, n)\xi]}{\lambda(z, n-1)} \end{array} \right.$$

und angenommen, daß diese Funktionen für $z \in \mathfrak{G}$ und für ξ zum mindesten in einer Umgebung von $\xi = 1$ gleichmäßig in z und ξ gegen eine analytische Funktion konvergieren:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(z, \xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z, \xi) \\ \text{bzw. } \Psi(z, \xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(z, \xi). \end{array} \right.$$

Nach (9) ist $\Phi(z, 1) = \Psi(z, 1) = 1$: also ist $\xi = 1$ ein Fixpunkt der Funktionen $\Phi(z, \xi)$ und $\Psi(z, \xi)$ in ξ mit dem Multiplikator

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} M(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}(z, 1) \\ \text{bzw. } N(z) = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}(z, 1). \end{array} \right.$$

Weiter werde vorausgesetzt, daß die $\varphi_n(z, \xi)$ bzw. $\psi_n(z, \xi)$ für alle $z \in \mathfrak{G}$ bei hinreichend großem n in der Nähe von $\xi = 1$ Fixpunkte

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \varrho_n(z) \\ \text{bzw. } \xi = \sigma_n(z) \end{array} \right.$$

nach der Gleichung

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varrho_n(z) = \frac{H[z-n, \kappa(z, n)\varrho_n(z)]}{\kappa(z, n-1)} \\ \text{bzw. } \sigma_n(z) = \frac{H[z+n, \lambda(z, n)\sigma_n(z)]}{\lambda(z, n-1)} \end{array} \right.$$

mit den Multiplikatoren

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_n(z) = \frac{\kappa(z, n)}{\kappa(z, n-1)} \cdot \frac{\partial H}{\partial w}[z-n, \kappa(z, n) \varrho_n(z)] \\ \text{bzw. } \nu_n(z) = \frac{\lambda(z, n)}{\lambda(z, n-1)} \cdot \frac{\partial H}{\partial w}[z+n, \lambda(z, n) \sigma_n(z)] \end{array} \right.$$

besitzen; dazu wird angenommen, daß in $\mathfrak{G}$ die Grenzwerte

$$(17) \quad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n(z) = 1 \\ \text{bzw. } \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(z) = 1 \end{cases}$$

und

$$(18) \quad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(z) = M(z) \\ \text{bzw. } \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(z) = N(z) \end{cases}$$

gleichmäßig existieren.

9. Satz 1. Wenn in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ der z -Ebene die Voraussetzungen 8. zutreffen und überdies

$$(19) \quad \begin{cases} |M(z)| < 1 \\ \text{bzw. } |N(z)| < 1 \end{cases}$$

ist, so konvergiert die Folge (2) gleichmäßig gegen eine meromorphe Lösung $f(z)$ bzw. $g(z)$ von (1). Die gleiche Lösung ergibt sich, wenn statt der $\alpha(z, n)$ bzw. $\lambda(z, n)$ andere Funktionen $\alpha^*(z, n)$ bzw. $\lambda^*(z, n)$ eingesetzt werden, für welche der Grenzwert

$$(20) \quad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^*(z, n)}{\alpha(z, n)} = 1 \\ \text{bzw. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^*(z, n)}{\lambda(z, n)} = 1 \end{cases}$$

in $\mathfrak{G}$ gleichmäßig konvergierend erzielt wird.

Der Beweis dieses Satzes wird nur für $f(z)$ durchgeführt, für $g(z)$ verläuft er analog. Unter **10. 11. 12.** wird gezeigt, daß die Menge der Näherungsfunktionen (2) bei jedem Punkt $z_0 \in \mathfrak{G}$ (also auch in $\mathfrak{G}$ normal⁷⁾ ist. Hierzu wird z in der ganz in $\mathfrak{G}$ gelegenen abgeschlossenen Umgebung $\mathcal{A}$ von z_0 betrachtet. Hernach wird unter **13.** bewiesen, daß diese Normalfolge nur eine Grenzfunktion, nämlich $f(z)$ besitzt, und nach dem unter **14.** erbrachten Nachweis, daß die Grenzfunktion wirklich die Gleichung (1) erfüllt, folgt unter **15.** der Beweis für den zweiten, die Funktion $\alpha^*(z, n)$ betreffenden Teil des Satzes 1.

Satz 1 läßt sich nicht nur auf Differenzgleichungen (3), sondern auch auf zahlreiche andere Differenzgleichungen anwenden. Beispielsweise wird die Gleichung

$$f(z+1) = \frac{af(z) + b}{z}$$

(a und b sind beliebige reelle oder komplexe Konstanten) durch den

⁷⁾ siehe z. B. die zusammenfassende Darstellung MONTEL [3]. Der wichtigste hier benutzte Satz besagt, daß eine Folge meromorpher Funktionen in einem Gebiet normal ist, wenn sie dort mindestens drei Werte der Zahlenkugel ausläßt.

Ansatz

$$x(z, n) = \frac{b}{z - n - 1}$$

mit $\Phi(z, \xi) \equiv 1$ gelöst. Es ergibt sich dann

$$f(z) = b \left(\frac{1}{z-1} + \frac{a}{(z-1)(z-2)} + \cdots + \frac{a^{k-1}}{(z-1)(z-2)\cdots(z-k)} + \cdots \right).$$

Diese Reihe konvergiert (abgesehen von Polen) in der vollen Ebene, da $|M| \equiv 0$ ⁸⁾. — Sind $a(z)$ und $b(z)$ rationale Funktionen mit $a(\infty) = a \neq \infty$ und $b(\infty) = b \neq \infty$, so ist

$$f(z) = \frac{b(z-1)}{z-1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a(z-1) \dots a(z-k+1) b(z-k)}{(z-1) \dots (z-k)} \quad \left(K^* = \frac{b(z-n-1)}{z-n-1} \right)$$

eine meromorphe Lösung der Differenzengleichung

$$f(z+1) = \frac{1}{z} \cdot [a(z)f(z) + b(z)].$$

10. Zu $\mathcal{A}$ läßt sich ein hinreichend kleines positives δ finden, daß für $z \in \mathcal{A}$

$$|M(z)| \leq 1 - \delta.$$

Da $\xi = 1$ anziehender Fixpunkt von $\Phi(z, \xi)$ ist, gibt es ein maximales positives ε_0 (evtl. $\varepsilon_0 = \infty$), daß für $z \in \mathcal{A}$ und $|\xi - 1| < \tau \varepsilon_0$ (zunächst wird nur $\tau = 1$ gebraucht; später ist der Beweis für positive $\tau \rightarrow \infty$ zu benutzen; $\varepsilon_0 \neq \infty$ ist abhängig von τ):

$$|\Phi(z, \xi) - 1| < \left(1 - \frac{\delta}{4}\right) |\xi - 1|.$$

Nun wird die kleinste natürliche, von τ abhängende Zahl n_1 so festgelegt, daß für alle $n \geq n_1$ und $z \in \mathcal{A}$

$$\text{bei } \varepsilon_0 \neq \infty : |q_n(z) - 1| < \frac{\varepsilon_0}{4}$$

$$\text{oder bei } \varepsilon_0 = \infty : |q_n(z) - 1| < \frac{1}{4\tau}$$

und

$$|\mu_n(z)| < 1 - \frac{\delta}{2}.$$

Zu jedem dieser $n \geq n_1$ gibt es ein größtes positives ε_n (evtl. $\varepsilon_n = \infty$), daß für $z \in \mathcal{A}$ und $|\xi - q_n(z)| < \tau \varepsilon_n$:

$$|q_n(z, \xi) - q_n(z)| < \left(1 - \frac{\delta}{4}\right) |\xi - q_n(z)|.$$

Die $\varepsilon_n \neq \infty$ hängen natürlich von τ ab; es ist

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \varepsilon_0$$

⁸⁾ STEPHENS [5] behandelt die allgemeinere Aufgabe, gewisse Systeme von Differenzengleichungen erster Ordnung zu lösen. Er findet bei obigem (allerdings auf positive Konstante a und b eingeschränktem) Beispiel die gleiche Reihe.

und deshalb gibt es eine kleinste natürliche, von τ abhängende Zahl $n_2 \geq n_1$, daß für alle $n \geq n_2$

$$\text{bei } \varepsilon_0 \neq \infty : \frac{\varepsilon_0}{2} < \varepsilon_n$$

$$\text{oder bei } \varepsilon_0 = \infty : \frac{1}{2\tau} < \varepsilon_n.$$

Dieserhalb und wegen

$$|q_n(z) - 1| < \frac{\varepsilon_0}{4}$$

$$\text{bzw. } |q_n(z) - 1| < \frac{1}{4\tau}$$

gibt es einen (von τ abhängenden) größten Kreis γ in der ξ -Ebene

$$|\xi - 1| < \varepsilon(\tau),$$

der nur aus Punkten ξ besteht, die sowohl in

$$|\xi - 1| < \varepsilon_0$$

als auch in allen

$$|\xi - q_n(z)| < \varepsilon_n \quad (n \geq n_2)$$

liegen; bei $\varepsilon_0 = \infty$ wird

$$\varepsilon(\tau) = \frac{1}{4\tau}$$

angesetzt. Für jeden Punkt $\xi \in \gamma$ gilt bei $n \geq n_2$ (da $\varepsilon_n \leq \tau \varepsilon_n$):

$$|\varphi_n(z, \xi) - q_n(z)| < \left(1 - \frac{\delta}{4}\right) |\xi - q_n(z)|.$$

Jetzt wird die kleinste natürliche, von τ abhängende Zahl $n_0 \geq n_2$ so gewählt, daß für $z \in \mathcal{A}$ und $n \geq n_0$:

$$|q_n(z) - 1| < \frac{\delta}{8} \varepsilon(\tau)$$

ist. Aus den beiden letzten Ungleichungen folgt, daß für $z \in \mathcal{A}$, $|\xi - 1| < \varepsilon(\tau)$ und alle $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} |\varphi_n(z, \xi) - 1| &\leq |\varphi_n(z, \xi) - q_n(z)| + |q_n(z) - 1| \\ &< \left(1 - \frac{\delta}{4}\right) |\xi - q_n(z)| + \frac{\delta}{8} \varepsilon(\tau) \leq \left(1 - \frac{\delta}{4}\right) \{|\xi - 1| + |1 - q_n(z)|\} \\ &\quad + \frac{\delta}{8} \varepsilon(\tau) \\ &< \left(1 - \frac{\delta}{4}\right) \left\{ \varepsilon(\tau) + \frac{\delta}{8} \varepsilon(\tau) \right\} + \frac{\delta}{8} \varepsilon(\tau) = \varepsilon(\tau) - \frac{\delta^2}{32} \varepsilon(\tau) < \varepsilon(\tau). \end{aligned}$$

Jeder Punkt ξ des Kreises γ geht also durch jedes $\varphi_n(z, \xi)$ ($z \in \mathcal{A}$, $n \geq n_0$) auf einen Punkt von γ über; mit anderen Worten: γ ist gegenüber diesen $\varphi_n(z, \xi)$ invariant.

11. Die unter 10. niedergelegte Erörterung sollte zunächst nur für $\tau = 1$ durchgeführt werden. Wird aber ein positives τ aus dem Intervall $1 < \tau < \infty$ verwendet, so ergibt sich bei $\varepsilon_0 \neq \infty$ ein τ -mal

so kleines ε_0 . $n_1(\tau)$ wird bei größer werdendem τ nicht kleiner und es ist $\lim_{\tau \rightarrow \infty} n_1(\tau) = \infty$ (wenn nicht $\varphi_n(z) \equiv 1$; in diesem Fall wird der Beweis viel einfacher!). Die ε_n sind τ -mal so klein. Weiter ergeben sich andere $n_2(\tau)$ mit $\lim_{\tau \rightarrow \infty} n_2(\tau) = \infty$, ein τ -mal so kleines $\varepsilon(\tau)$ und andere $n_0(\tau)$ mit

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \varepsilon(\tau) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} n_0(\tau) = \infty.$$

Die Funktion $n_0(\tau)$ bzw. ihre Umkehrung werden wir noch unter **13.** benutzen.

Unter **10.** und **11.** wurde gezeigt, daß es beliebig kleine Kreise $\gamma(\tau)$ um $\xi = 1$ gibt, die gegenüber allen Funktionen $\varphi_n(z, \xi)$ mit $n \geq n_0(\tau)$ und $z \in \mathcal{A}$ invariant sind.

12. Hier wird gezeigt, daß die Folge (2) in $\mathcal{A}$ normal ist. Es wird nur $\tau = 1$ benutzt: $n_0(1) = n_0$.

Die Funktion

$$H[z - n_0, \kappa(z, n_0) \xi]$$

hat für (die unabhängigen Variablen) $z \in \mathcal{A}$ und $\xi \in \gamma$ einen bestimmten Wertevorrat γ' . Überdeckt die Menge γ' die ganze in zwei Stellen punktierte Zahlenkugel, so läßt sich $\mathcal{A}$ derart in endlich viele überlappende abgeschlossene Gebiete $\mathcal{A}_r$ zerlegen, daß der Wertevorrat von

$$H[z - n_0, \kappa(z, n_0) \xi] = \kappa(z, n_0 - 1) \varphi_{n_0}(z, \xi)$$

in $z \in \mathcal{A}_r$ und $\xi \in \gamma$ mindestens drei Werte der Zahlenkugel ausläßt; bedeckt γ' nicht die volle zweifach punktierte Zahlenkugel, so ist $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_1$. Der zu $\mathcal{A}_r$ gehörende Wertevorrat wird mit Γ_r bezeichnet; jedes Γ_r läßt mindestens drei Punkte der Zahlenkugel frei.

Die Menge $z \in \mathcal{A}_v$, $\xi \in \gamma$ wird durch die Funktion

$$\begin{aligned} & H\{z - n_0, H[z - n_0 - 1, \kappa(z, n_0 + 1) \xi]\} \\ &= H\left\{z - n_0, \kappa(z, n_0) \frac{H[z - n_0 - 1, \kappa(z, n_0 + 1) \xi]}{\kappa(z, n_0)}\right\} \\ &= H\{z - n_0, \kappa(z, n_0) \varphi_{n_0+1}(z, \xi)\} \end{aligned}$$

(da ja der Wert $\varphi_{n_0+1}(z, \xi)$ mit ξ wieder in γ liegt) auf Γ_v oder einen Teil dessen abgebildet. Durch die Funktion

$$\begin{aligned} & H\{z - n_0, H[z - n_0 - 1, H\{z - n_0 - 2, \kappa(z, n_0 + 2) \xi\}]\} \\ &= H\{z - n_0, H[z - n_0 - 1, \kappa(z, n_0 + 1) \varphi_{n_0+2}(z, \xi)]\} \end{aligned}$$

wird $z \in \mathcal{A}_v$, $\xi \in \gamma$ auf

$$H\{z - n_0, H[z - n_0 - 1, \kappa(z, n_0 + 1) \xi']\}$$

mit $\xi' \in \gamma$ abgebildet. Falls mit ξ' so verfahren wird, wie vorhin mit ξ , so folgt, daß auch durch

$$H\{z - n_0, H[z - n_0 - 1, H(z - n_0 - 2, \kappa(z, n_0 + 2) \xi)]\}$$

die Menge $z \in \mathcal{A}$, $\xi \in \gamma$ auf Γ , (oder einen Teil davon) abgebildet wird. usw.

Die Menge aller Funktionen

$$\chi_m(z, \xi) = H\{z - n_0, H[z - n_0 - 1, \dots, H(z - n_0 - m, \kappa(z, n_0 + m) \xi)]\}$$

($m = 0, 1, 2, \dots$) ist also, da Γ , mindestens drei Werte ausläßt, in $z \in \mathcal{A}$, $\xi \in \gamma$ und somit auch in $z \in \mathcal{A}$, $\xi \in \gamma$ d. h. bei z , normal. Insbesondere ist die Menge der

$$H\{z - n_0, H[z - n_0 - 1, \dots, H(z - n_0 - m, \kappa(z, n_0 + m))] \} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

(als Funktionen von z ; $\xi = 1$!) in $\mathcal{A}$ normal und konvergiert dort gleichmäßig gegen eine oder (a priori) mehrere meromorphe Grenzfunktionen.

13. Jetzt soll gezeigt werden, daß nur eine einzige Grenzfunktion existiert: Angenommen, es gäbe zwei Folgen natürlicher Zahlen

$$m'_1, m'_2, m'_3, \dots$$

$$m''_1, m''_2, m''_3, \dots$$

mit

$$0 < m'_1 < m''_1 < m'_2 < m''_2 \dots$$

daß

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \chi_{m'_\alpha}(z, 1) = \chi_I(z, 1) \quad \text{und} \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \chi_{m''_\alpha}(z, 1) = \chi_{II}(z, 1)$$

für $z \in \mathcal{A}$ gleichmäßig konvergiert. Nun wird z festgehalten; die m'_α und m''_α können von vornherein so stark ausgesiebt sein, daß zugleich (wegen der Normalität auch bezüglich ξ)

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \chi_{m'_\alpha}(z, \xi) = \chi_I(z, \xi) \quad \text{und} \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \chi_{m''_\alpha}(z, \xi) = \chi_{II}(z, \xi)$$

gleichmäßig für das feste z und alle $\xi \in \gamma$ erreicht wird. Offenbar ist

$$\chi_{m'_\alpha}(z, 1) = H\{z - n_0, H[z - n_0 - 1, \dots, H(z - n_0 - m'_\alpha, \kappa(z, n_0 + m'_\alpha) \xi_{m'_\alpha})]\}$$

mit

$$\xi_{m'_\alpha} = \frac{1}{\kappa(z, n_0 + m'_\alpha)}$$

$$H\{z - n_0 - m'_\alpha - 1, H[z - n_0 - m'_\alpha - 2, \dots, H(z - n_0 - m''_\alpha, \kappa(z, n_0 + m''_\alpha))] \}$$

d. h. es ist

$$\chi_{m''_\alpha}(z, 1) = \chi_{m'_\alpha}(z, \xi_{m'_\alpha}).$$

Jetzt wird in der unter 11. angegebenen Funktion $n = n_0(\tau)$ für n die größte natürliche Zahl $< n_0 + m'_\alpha$ eingesetzt, zu welcher eine positive Zahl τ gehört, und mit diesem τ die unter 10. angestellte Untersuchung durchgeführt, so ergibt sich für

$$|\xi - 1| < \varepsilon(\tau)$$

die Ungleichung

$$|\varphi_\nu(z, \xi) - 1| < \varepsilon(\tau) \quad (\nu \geq n_0 + m'_\alpha).$$

Wegen $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \varepsilon(\tau) = 0$ folgt hieraus

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \xi_{m'_\alpha} = 1$$

und danach

$$\chi_{II}(z, 1) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \chi_{m'_\alpha}(z, 1) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \chi_{m'_\alpha}(z, \xi_{m'_\alpha}) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \chi_{m'_\alpha}(z, 1) = \chi_I(z, 1),$$

womit die beiden Grenzfunktionen als identisch erwiesen sind.

Es war definiert

$$\begin{aligned} f(z) &= \lim_{m \rightarrow \infty} H\{z-1, H[z-2, \dots, H(z-n_0-m, \kappa(z, n_0+m))]\} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} H\{z-1, H[z-2, \dots, H(z-n_0+1, \chi_m(z, 1))]\} \\ &= H\{z-1, H[z-2, \dots, H(z-n_0+1, \lim_{m \rightarrow \infty} \chi_m(z, 1))]\} \\ &= H\{z-1, H[z-2, \dots, H(z-n_0+1, \chi(z, 1))]\}, \end{aligned}$$

$f(z)$ ist also eine in $\mathcal{A}$ meromorphe Funktion.

14. Nun wird der Nachweis erbracht, daß die gefundene Funktion tatsächlich der Differenzengleichung (1) genügt. Hierzu wird bewiesen, daß (zunächst für festes z)

$$f(z) = H\{z-1, f(z-1)\},$$

$$\begin{aligned} \text{also} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} H\{z-1, H[z-2, \dots, H(z-n_0-m, \kappa(z, n_0+m))]\} \\ = H\{z-1, \lim_{m \rightarrow \infty} H[z-2, \dots, H(z-n_0-m-1, \kappa(z-1, n_0+m))]\} \end{aligned}$$

ist. Wegen (10) ist

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \chi_m(z, 1) = \lim_{m \rightarrow \infty} \chi_m\left\{z, \frac{H[z-n_0-m-1, \kappa(z-1, n_0+m)]}{\kappa(z, n_0+m)}\right\}$$

und deshalb

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} H\{z-1, H[z-2, \dots, H(z-n_0+1, \chi_m(z, 1))]\} \\ = H\left\{z-1, \lim_{m \rightarrow \infty} H\left[z-2, \dots, \right. \right. \\ \left. \left. H\left(z-n_0+1, \chi_m\left(z, \frac{H[z-n_0-m-1, \kappa(z-1, n_0+m)]}{\kappa(z, n_0+m)}\right)\right)\right]\right\}, \end{aligned}$$

was gezeigt werden sollte.

15. Der Beweis für den letzten Teil des Satzes: Werden meromorphe Funktionen $\kappa^*(z, n)$ statt $\kappa(z, n)$ mit gleichmäßiger Konvergenz für

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\kappa^*(z, n)}{\kappa(z, n)} = 1$$

eingesetzt, so ist (zunächst für festes z)

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} H\{z-n_0, H[z-n_0-1, \dots, H(z-n_0-m, \kappa^*(z, n_0+m))]\} \\ = \lim_{m \rightarrow \infty} \chi_m\left(z, \frac{\kappa^*(z, n_0+m)}{\kappa(z, n_0+m)}\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \chi_m(z, 1); \end{aligned}$$

d. h. die Grenzfunktionen sind identisch.

16. Satz 1 kann für den Fall

$$\begin{cases} |M(z)| \equiv 1 \\ \text{bzw. } |N(z)| \equiv 1 \end{cases}$$

unter Hinzunahme spezieller Voraussetzungen verschärft werden. Diese Voraussetzungen reichen hin, die unter III, § 1 behandelten Fälle zu erfassen. Die Methode läßt gewiss Verschärfungen zu, auf die jetzt aber nicht eingegangen werde.

Zusätzliche Bedingungen: $\kappa(z, n)$ bzw. $\lambda(z, n)$ sind meromorphe Funktionen in z und meromorph oder algebraisch in n . Weiter kommen die Bedingungen a—g hinzu:

a) Die

$$\begin{cases} \varphi_n(z, \xi) \\ \text{bzw. } \psi_n(z, \xi) \end{cases}$$

konvergieren in $\mathfrak{G}$ gleichmäßig gegen die von z unabhängige Funktion

$$\begin{cases} \Phi(\xi) \\ \text{bzw. } \Psi(\xi) \end{cases}$$

und sind in $\mathfrak{G}$ für $n \geq n_1$ ebenso wie $\Phi(\xi)$ bzw. $\Psi(\xi)$ Möbiustransformationen in ξ mit je zwei Fixpunkten

$$\begin{cases} \varrho_n^{(1)}(z) \text{ und } \varrho_n^{(2)}(z) \\ \text{bzw. } \sigma_n^{(1)}(z) \text{ und } \sigma_n^{(2)}(z) \end{cases}$$

mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n^{(1)}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^{(1)}(z) = 1$$

und

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n^{(2)}(z) = \varrho \\ \text{bzw. } \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^{(2)}(z) = \sigma. \end{cases}$$

b) Weiter ist

$$\begin{cases} |M| = 1 \\ \text{bzw. } |N| = 1, \end{cases}$$

und für $n \geq n_1$ gilt, falls $z \in \mathfrak{G}'$ ($\mathfrak{G}'$ ein beliebiger abgeschlossener Teilbereich von $\mathfrak{G}$)

$$\begin{cases} |\mu_n^{(1)}(z)| < 1 \\ \text{bzw. } |\nu_n^{(1)}(z)| < 1. \end{cases}$$

Die zusätzlichen Bedingungen c—g werden in der (die Ausdrucksweise wesentlich vereinfachenden) ξ^* -Ebene angegeben. Es ist

$$\begin{cases} \xi^* = \frac{\xi - 1}{\xi - \varrho} \\ \text{bzw. } \xi^* = \frac{\xi - 1}{\xi - \sigma}, \end{cases}$$

und die Bilder der Punkte oder Punktmengen aus der ξ -Ebene werden durch einen angehängten Stern gekennzeichnet. Da $\kappa(z, n)$ bzw. $\lambda(z, n)$ meromorphe oder algebraische Funktionen sind, ist letztlich auch [siehe (15)]

$$\left\{ \begin{array}{l} \varrho_n^{(v)}(z) \\ \text{bzw. } \sigma_n^{(v)}(z) \end{array} \right. \quad (v = 1, 2)$$

eine Funktion in z und n , durch welche die positive reelle n -Achse auf mindestens eine Kurve

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{G}^{(1)}(z) \text{ und } \mathfrak{G}^{(2)}(z) \\ \text{bzw. } \mathfrak{D}^{(1)}(z) \text{ und } \mathfrak{D}^{(2)}(z) \end{array} \right.$$

abgebildet wird. Folgende nur für den Fall der Werte $\varrho_n^{(v)}(z)$ etc. angeschriebenen Bedingungen sollen erfüllt sein:

c) Zu vorgegebenem $L > 0$ gibt es ein $n_{II}(L)$, daß für $n \geq n_{II}(L)$ und $z \in \mathfrak{G}'$ die Länge der Kurve $\mathfrak{G}^{(1)*}(z)$ zwischen $\varrho_n^{(1)*}(z)$ und $\xi^* = 0$ kleiner als L ist.

d) Zu einer beliebigen positiven Zahl K gibt es ein $n_{III}(K)$, daß für alle $n \geq n_{III}(K)$ und $z \in \mathfrak{G}'$ gilt

$$|\varrho_n^{(2)*}(z) - \varrho_n^{(1)*}(z)| > K.$$

e) Es gibt ein n_{IV} , daß für $n \geq n_{IV}$ und $z \in \mathfrak{G}'$

$$\arg \{ \varrho_n^{(2)*}(z) - \varrho_n^{(1)*}(z) \}$$

um weniger als $\frac{\pi}{4}$ vom existent angenommenen Häufungswert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arg \{ \varrho_n^{(2)*}(z) - \varrho_n^{(1)*}(z) \} = \beta(z)$$

abweicht und

f) daß

$$|\varrho_n^{(2)*}(z) - \varrho_n^{(1)*}(z)| > |\varrho_{n-1}^{(2)*}(z) - \varrho_{n-1}^{(1)*}(z)|$$

und weiter

g)

$$\arg \{ \varrho_n^{(2)*}(z) - \varrho_n^{(1)*}(z) \}$$

monoton gegen $\beta(z)$ strebt.

Satz 1a. Wenn in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ der z -Ebene

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} |M(z)| = 1 \\ \text{bzw. } |N(z)| = 1 \end{array} \right.$$

und über die unter 8. angegebenen Vorausbedingungen hinaus die obigen zusätzlichen Bedingungen a—g erfüllt sind, so konvergiert die Folge (2) gleichmäßig gegen eine meromorphe Lösung $f(z)$ bzw. $g(z)$ von (1). Die gleiche Lösung ergibt sich, wenn statt $\kappa(z, n)$ bzw. $\lambda(z, n)$ andere Funktionen $\kappa^*(z, n)$ bzw. $\lambda^*(z, n)$ eingesetzt werden, für die (20) in $\mathfrak{G}$ gleichmäßig konvergiert.

Der Beweis dieses Satzes geht analog zu dem Beweis des Satzes 1. Die Erschwerung liegt darin, daß nicht (wie unter 10.) ohne weiteres invariante Gebiete nachgewiesen werden können. Unter 17. wird gezeigt, daß es ein Gebiet um $\xi = 1$ gibt, welches durch die aufeinanderfolgenden Abbildungen nicht sehr weit von $\xi = 1$ forttransformiert wird. Dabei läßt sich analog zu 11. eine Zusammenziehung des Verfahrens auf $\xi = 1$ angeben. Die Abschnitte 12.—15. lassen sich (unter 18.) fast wörtlich übernehmen.

17. Es wird zunächst nur in der ξ^* -Ebene untersucht, wo die beiden Fixpunkte von $\Phi^*(\xi^*)$ in $\xi^* = 0$ bzw. $\xi^* = \infty$ liegen. Die Punkte $\varrho_n^{(1)*}(z)$ liegen natürlich monoton auf $\mathfrak{G}^{(1)*}(z)$.

Es wird eine positive Zahl $\tau > 1$ zunächst festgelegt; später wird analog zu 11. $\tau \rightarrow \infty$ zugelassen. Nach Bedingung c.) gibt es dann ein

$$n_{II}\left(\frac{1}{16\tau}\right),$$

daß für $z \in \mathfrak{G}'$ und $n \geq n_{II}\left(\frac{1}{16\tau}\right)$ die Länge der Kurve $\mathfrak{G}^{(1)*}(z)$ zwischen $\varrho_n^{(1)*}(z)$ und $\xi^* = 0$ kleiner als $\frac{1}{16\tau}$ ist. Insbesondere gilt für die Summe der Sehnen

$$(22) \quad \sum_{n=n_{II}\left(\frac{1}{16\tau}\right)}^{\infty} |\varrho_{n+1}^{(1)*}(z) - \varrho_n^{(1)*}(z)| < \frac{1}{16\tau}.$$

Da für $n \geq n_I$ und $z \in \mathfrak{G}'$

$$|\mu_n^{(1)*}(z)| < 1$$

gilt, ist jeder den Punkt $\varrho_n^{(1)*}(z)$ umschließende und alle durch $\varrho_n^{(1)*}(z)$ sowie $\varrho_n^{(2)*}(z)$ verlaufenden Kreise orthogonal schneidende Kreis invariant gegenüber der linearen Abbildung $\varphi_n^*(z, \xi^*)$ (in dem Sinne, als er durch diese Abbildung auf einen Teil seiner selbst abgebildet wird). Der Mittelpunkt dieses Kreises mit dem Radius r hat den Wert

$$\varrho_n^{(1)*}(z) + \varepsilon \{r, |\varrho_n^{(2)*}(z) - \varrho_n^{(1)*}(z)|\} \frac{\varrho_n^{(1)*}(z) - \varrho_n^{(2)*}(z)}{|\varrho_n^{(1)*}(z) - \varrho_n^{(2)*}(z)|},$$

wobei

$$\varepsilon \{r, |\varrho_n^{(2)*}(z) - \varrho_n^{(1)*}(z)|\} = \frac{1}{2} |\varrho_n^{(2)*}(z) - \varrho_n^{(1)*}(z)| \left[\sqrt{1 + \frac{2r}{|\varrho_n^{(2)*}(z) - \varrho_n^{(1)*}(z)|}} - 1 \right] > 0.$$

Je größer $|\varrho_n^{(2)*}(z) - \varrho_n^{(1)*}(z)|$ ist, um so kleiner ist bei festgelegtem Radius r der Wert der „Exzentrizität“ ε . Wird

$$r_0 = \frac{1}{2\tau}$$

gesetzt, so gibt es wegen Bedingung d) einen genügend großen Index $n_V(\tau)$, daß für alle $n \geq n_V(\tau)$ und $z \in \mathfrak{G}'$ die $r \leq r_0$ zugehörige Exzentrizität kleiner ist als $\frac{1}{16\tau}$.

Nun wird gesetzt

$$n_0 = \text{Max.} \left\{ n_I, n_{II} \left(\frac{1}{16\tau} \right), n_{IV}, n_V(\tau) \right\}.$$

Für jedes $z \in \mathfrak{G}'$ läßt sich dann folgendes konstruieren: Der invariante Kreis bezüglich $\varphi_{n_0}^*(z, \xi^*)$ mit dem Radius $r_0 = \frac{1}{2\tau}$ besitzt den Mittelpunkt

$$\begin{aligned} M_0(z) &= \varphi_{n_0}^{(1)*}(z) + \varepsilon \left\{ \frac{1}{2\tau}, |\varphi_{n_0}^{(2)*}(z) - \varphi_{n_0}^{(1)*}(z)| \right\} \frac{\varphi_{n_0}^{(1)*}(z) - \varphi_{n_0}^{(2)*}(z)}{|\varphi_{n_0}^{(1)*}(z) - \varphi_{n_0}^{(2)*}(z)|} \\ &= \varphi_{n_0}^{(1)*}(z) + \varepsilon_0(z) \frac{\varphi_{n_0}^{(1)*}(z) - \varphi_{n_0}^{(2)*}(z)}{|\varphi_{n_0}^{(1)*}(z) - \varphi_{n_0}^{(2)*}(z)|}. \end{aligned}$$

Da wegen (22) für $\nu = 0, 1, 2, \dots$

$$|\varphi_{n_0+\nu}^{(1)*}(z)| < \frac{1}{16\tau}$$

und

$$\varepsilon_0(z) < \frac{1}{16\tau}$$

ist, gilt

$$|M_0(z)| < \frac{1}{8\tau}.$$

$\varphi_{n_0+1}^{(1)*}(z)$ liegt somit innerhalb dieses invarianten Kreises und es gibt einen, diesen Kreis von innen her berührenden Kreis aus der Schar derjenigen Kreise, welche der linearen Abbildung $\varphi_{n_0+1}^*(z, \xi^*)$ gegenüber invariant sind. Der Radius $r_1(z)$ dieses Kreises ist kleiner als $r_0 = \frac{1}{2\tau}$ und seine Exzentrizität $\varepsilon_1(z)$ ist dieserhalb und nach Bedingung f)

$$|\varphi_{n_0+1}^{(2)*}(z) - \varphi_{n_0+1}^{(1)*}(z)| > |\varphi_{n_0}^{(2)*}(z) - \varphi_{n_0}^{(1)*}(z)|$$

kleiner als $\varepsilon_0(z)$. Sein Mittelpunkt ist

$$M_1(z) = \varphi_{n_0+1}^{(1)*}(z) + \varepsilon_1(z) \frac{\varphi_{n_0+1}^{(1)*}(z) - \varphi_{n_0+1}^{(2)*}(z)}{|\varphi_{n_0+1}^{(1)*}(z) - \varphi_{n_0+1}^{(2)*}(z)|}$$

mit

$$|M_1(z)| < \frac{1}{8\tau}.$$

Falls nun

$$r_1(z) > \frac{3}{16\tau},$$

liegt $\varphi_{n_0+2}^{(1)*}(z)$ innerhalb des Kreises um $M_1(z)$ mit dem Radius $r_1(z)$ und es läßt sich ein diesen Kreis von innen berührender Kreis finden, der gegenüber $\varphi_{n_0+2}^*(z, \xi^*)$ invariant ist. Sein Radius $r_2(z)$ ist kleiner als $r_1(z)$ und seine Exzentrizität $\varepsilon_2(z)$ ist wegen f) kleiner als $\varepsilon_1(z)$. Weiter ist

$$M_2(z) = \varphi_{n_0+2}^{(1)*}(z) + \varepsilon_2(z) \frac{\varphi_{n_0+2}^{(1)*}(z) - \varphi_{n_0+2}^{(2)*}(z)}{|\varphi_{n_0+2}^{(1)*}(z) - \varphi_{n_0+2}^{(2)*}(z)|}$$

mit

$$|M_2(z)| < \frac{1}{8\tau}.$$

Falls

$$r_2(z) > \frac{3}{16\tau}, \quad r_3(z) > \frac{3}{16\tau}, \dots,$$

läßt sich dieses Verfahren ad infinitum fortsetzen und es wird sein:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\nu(z) &> \varepsilon_{\nu+1}(z) \\ |M_\nu(z)| &< \frac{1}{8\tau} \\ r_\nu(z) &> r_{\nu+1}(z) \end{aligned} \right\} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots).$$

Zum Nachweis der Durchführbarkeit dieses Konstruktionsverfahrens ist noch zu zeigen, daß für $N = 1, 2, \dots$

$$r_N(z) > \frac{3}{16\tau}.$$

Offenbar ist

$$r_1(z) = \frac{1}{2\tau} - |M_1(z) - M_0(z)|$$

und

$$r_2(z) = r_1(z) - |M_2(z) - M_1(z)|, \quad r_3(z) = r_2(z) - |M_3(z) - M_2(z)|, \dots$$

für jede natürliche Zahl N also

$$(23) \quad r_N(z) = \frac{1}{2\tau} - |M_1(z) - M_0(z)| - |M_2(z) - M_1(z)| - \dots - |M_N(z) - M_{N-1}(z)|.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} |M_\nu(z) - M_{\nu-1}(z)| &= \varrho_{n_0+\nu}^{(1)*}(z) - \varepsilon_\nu(z) \frac{\varrho_{n_0+\nu}^{(2)*}(z) - \varrho_{n_0+\nu}^{(1)*}(z)}{|\varrho_{n_0+\nu}^{(2)*}(z) - \varrho_{n_0+\nu}^{(1)*}(z)|} - \varrho_{n_0+\nu-1}^{(1)*}(z) \\ &+ \varepsilon_{\nu-1}(z) \frac{\varrho_{n_0+\nu-1}^{(2)*}(z) - \varrho_{n_0+\nu-1}^{(1)*}(z)}{|\varrho_{n_0+\nu-1}^{(2)*}(z) - \varrho_{n_0+\nu-1}^{(1)*}(z)|} \leq |\varrho_{n_0+\nu}^{(1)*}(z) - \varrho_{n_0+\nu-1}^{(1)*}(z)| \\ &+ |\varepsilon_{\nu-1}(z) \frac{\varrho_{n_0+\nu-1}^{(2)*}(z) - \varrho_{n_0+\nu-1}^{(1)*}(z)}{|\varrho_{n_0+\nu-1}^{(2)*}(z) - \varrho_{n_0+\nu-1}^{(1)*}(z)|} - \varepsilon_\nu(z) \frac{\varrho_{n_0+\nu}^{(2)*}(z) - \varrho_{n_0+\nu}^{(1)*}(z)}{|\varrho_{n_0+\nu}^{(2)*}(z) - \varrho_{n_0+\nu}^{(1)*}(z)|}|. \end{aligned}$$

Um zu einer Abschätzung des zweiten Terms zu kommen, werde Fig. 1 benutzt. Auf dem Strahl mit der Richtung $\beta(z)$ (siehe Bedingung e) werden von Null aus die monoton kleiner werdenden $\varepsilon_\nu(z)$ ange tragen. Von diesen Punkten gelangt man durch Drehungen zu den Werten

$$A_\nu(z) = \varepsilon_\nu(z) \frac{\varrho_{n_0+\nu}^{(2)*}(z) - \varrho_{n_0+\nu}^{(1)*}(z)}{|\varrho_{n_0+\nu}^{(2)*}(z) - \varrho_{n_0+\nu}^{(1)*}(z)|}.$$

Nach Bedingung g) ist hierbei die Drehung bei $A_{\nu-1}(z)$ größer als bei $A_\nu(z)$; der zweite Term stellt geometrisch also die Strecke in Fig. 1 dar, die $A_{\nu-1}(z)$ mit $A_\nu(z)$

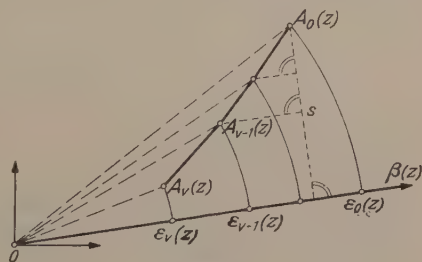


Fig. 1.

verbindet. Dann wird aus (23)

$$r_N(z) \geq \frac{1}{2\tau} - \left[\sum_{\nu=1}^N |\varrho_{n_0+\nu}^{(1)*}(z) - \varrho_{n_0+\nu-1}^{(1)*}(z)| + \text{Polygon}_N \right],$$

wobei mit Polygon_N die Länge des entsprechenden Polygons $A_0(z) \cdots A_N(z)$ in Fig. 1 bezeichnet wird. Dieses läßt sich aber leicht geometrisch abschätzen: Nach Bedingung e) wird in Fig. 1 der Punkt $\varepsilon_0(z)$ um weniger als $\frac{\pi}{4}$ gedreht; die Strecke s ist folglich kleiner als $\varepsilon_0(z)$, was seinerseits aber kleiner als $\frac{1}{16\tau}$ gewählt war. Es folgt nun leicht, daß das ganze Polygon $A_0(z) \cdots A_\nu(z) \cdots 0$ eine Länge kleiner als $3\varepsilon_0(z) < \frac{1}{4\tau}$ besitzt. Die Summe auf der rechten Seite ist mit (22) abgeschätzt. Insgesamt ergibt sich also für jedes natürliche N

$$r_N(z) > \frac{1}{2\tau} - \frac{1}{16\tau} - \frac{1}{4\tau} = \frac{3}{16\tau}.$$

Womit bewiesen ist, daß die Konstruktion möglich ist.

Zugleich ist damit aber auch gezeigt, daß es um $\xi^* = 0$ eine Umgebung (z. B.)

$$\mathfrak{U}^*(\tau) : |\xi^*| < \frac{1}{16\tau}$$

gibt, die völlig im Innern jedes der konstruierten jeweils invarianten Kreise liegt. $\mathfrak{U}^*(\tau)$ wird durch

$$\varphi_{n_0+N}(z, \xi^*)$$

(N beliebige natürliche Zahl) auf ein Gebiet abgebildet, welches ganz im Kreis um M_N verbleibt; dieses wiederum geht, da der bezüglich $\varphi_{n_0+N-1}^*(z, \xi^*)$ invariante Kreis um $M_{N-1}(z)$ es völlig umschließt, auf ein Gebiet über, welches ganz im Kreis um $M_{N-1}(z)$ liegt. Die aufeinanderfolgende Abbildung von $\mathfrak{U}^*(\tau)$ durch

$$\varphi_{n_0+\nu}^*(z, \xi^*) \quad (\nu = N, N-1, \dots, 0)$$

erbringt also, ganz gleich, wie N gewählt wird, zuletzt ein Bildgebiet, welches ganz im Kreise um $M_0(z)$ liegt.

Die für die Gesamtheit der in $\mathfrak{G}'$ liegenden z sich ergebenden Kreise (um das jeweilige $M_0(z)$ mit dem Radius $\frac{1}{2\tau}$) befinden sich beispielsweise im Kreise

$$\mathfrak{U}'(\tau) : |\xi^*| < \frac{1}{\tau}.$$

Das gleiche gilt, wenn $z \in \mathcal{A}$, d. h. z in der Umgebung des Punktes variiert, bei dem die Normalität nachgewiesen werden soll (siehe 9.). Offenbar ist

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathfrak{U}^*(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathfrak{U}'(\tau) = 0$$

und die von τ abhängende Zahl $n_0(\tau)$ erfüllt

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} n_0(\tau) = \infty.$$

Bei der Rückübertragung der Verhältnisse in die ξ -Ebene ergibt sich letztlich: Für $z \in \mathcal{A}$ gibt es beliebig kleine Kreise $\gamma(\tau)$ um $\xi = 1$, die für $n \geq n_0(\tau)$ durch successive Abbildung vermöge

$$\varphi_{n+N}(z, \xi), \varphi_{n+N-1}(z, \xi), \dots, \varphi_n(z, \xi)$$

(N beliebige natürliche Zahl) auf das Innere eines den Punkt $\xi = 1$ enthaltenden Gebietes $\tilde{\gamma}(\tau)$ abgebildet werden. Dabei ist

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \gamma(\tau) = 1, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}(\tau) = 1, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} n_0(\tau) = \infty$$

und der Durchmesser von $\gamma(\tau)$ verhält sich bei $\tau \rightarrow \infty$ zu dem von $\tilde{\gamma}(\tau)$ wie mindestens 1:16.

18. Mit diesem Ergebnis läßt sich der unter **12.** angegebene Beweis für die Normalität der Folge (2) mit einem beliebigen festen τ ohne weiteres übertragen. Auch die Untersuchungen **13.**—**15.** sind anwendbar.

19. Ob die Anwendung des in Satz 1 bzw. 1a gegebenen Verfahrens auf den Fall

$$\frac{\partial H}{\partial v} \equiv 0$$

einen Existenzbeweis für die ABELSche Funktion in dem Falle ermöglicht, daß anziehende oder abstoßende, gegebenenfalls auch rational indifferente Fixpunkte nicht vorhanden sind, sei hier nicht weiter untersucht. Vielmehr will ich mich auf die Behandlung von Differenzgleichungen der Art (3) beschränken.

III. Die Lösung der Differenzgleichung $F(z+1) = \frac{R_1(z)F(z) + R_2(z)}{F(z) + R_3(z)}$.

§ 1.

Eine meromorphe Lösung der Differenzgleichung $f(z+1) = \frac{R(z)}{1+f(z)}$ mit rationalem $R(z)$.

20. Zuerst wird der Fall, daß

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = \delta$$

einen endlichen Wert annimmt, behandelt. Wenn δ nicht grade

$$\delta \leq -\frac{1}{4}$$

erfüllt, so sind die Verhältnisse einfach. Es wird gesetzt:

$$\kappa(z, n) = \kappa = -\frac{1}{2} + \sqrt{\delta + \frac{1}{4}},$$

wobei die Wurzel so gewählt ist, daß

$$\Re\{\kappa\} > -\frac{1}{2}.$$

Dann führt nach Satz 1 der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(z-1)}{1 + \frac{R(z-2)}{1 + \frac{R(z-n+1)}{1 + \frac{R(z-n)}{1 + \kappa}}}}$$

auf eine meromorphe Funktion $f(z)$, da (9) mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{R(z-n-1)}{1 + \kappa} = \frac{\delta}{\kappa(1 + \kappa)} = 1$$

und (10) mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{R(z-n)}{1 + \kappa} = 1$$

gleichmäßig konvergiert. Aus (12) ergibt sich ebenfalls gleichmäßig konvergierend:

$$\varphi_n(z, \xi) = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{R(z-n)}{1 + \kappa \xi} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(\xi) = \frac{\delta}{\kappa(1 + \kappa \xi)}$$

mit dem Fixpunkt $\xi = 1$, dessen Multiplikator

$$M = -\frac{\delta \kappa}{\kappa(1 + \kappa)^2} = -\frac{\kappa}{1 + \kappa}$$

wegen $\Re\{\kappa\} > -\frac{1}{2}$ der Bedingung $|M| < 1$ genügt. Daß die Formeln (17) und (18) der Vorausbedingungen gleichmäßig konvergierend zutreffen, ist leicht einzusehen. Alles in allem sind die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt; also trifft auch seine Folgerung zu.

21. Etwas schwieriger sind die Untersuchungen im Fall $\delta < -\frac{1}{4}$: Hier führt der Ansatz für κ auf zwei Werte mit $\Re\{\kappa\} = -\frac{1}{2}$, was aber $|M| = 1$ mit sich bringt. Es sind also die Voraussetzungen von Satz 1 a zu verifizieren:

Eine der beiden Lösungen für κ wird zunächst herausgegriffen, nämlich die mit

$$\Im\{\sqrt{\delta + \frac{1}{4}}\} > 0 \quad \text{also} \quad \Im\{\kappa\} > 0.$$

Die Vorausbedingungen sind offenbar erfüllt. Nun zu den zusätzlichen Bedingungen 16! Offenbar sind

$$q_n^{(1)}(z) = \frac{1}{\kappa} \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{R(z-n) + \frac{1}{4}} \right)$$

$$q_n^{(2)}(z) = \frac{1}{\kappa} \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{R(z-n) + \frac{1}{4}} \right)$$

mit

$$\Im\{\sqrt{R(z-n) + \frac{1}{4}}\} > 0$$

die Fixpunkte der Möbiustransformationen $\varphi_n(z, \xi)$. Die Multiplikatoren errechnen sich mit

$$\mu_n^{(1)}(z) = -\frac{R(z-n)}{(\frac{1}{2} + \sqrt{R(z-n) + \frac{1}{4}})^2}.$$

Bei der getroffenen Auswahl der Wurzel ist, wie die Diskussion der Funktion

$$t' = -\frac{t}{(\frac{1}{2} \pm \sqrt{t + \frac{1}{4}})^2} \quad \text{oder} \quad t = -\frac{t'}{(1+t')^2}$$

lehrt (bei welcher $t \leq -\frac{1}{4}$ auf $|t'| = 1$ übergeht), der Multiplikator

$$|\mu_n^{(1)}(z)| < 1, \text{ wenn } \Im\{R(z-n)\} > 0.$$

Geht man von der Lösung für κ mit

$$\Im\{\sqrt{\delta + \frac{1}{4}}\} < 0, \text{ also } \Im\{\kappa\} < 0$$

aus, so wird in $\varphi_n^{(1)}(z)$ die Wurzel mit negativem Imaginärteil benötigt, ebenso in $\mu_n^{(1)}(z)$. Dann ergibt sich

$$|\mu_n^{(1)}(z)| < 1, \text{ wenn } \Im\{R(z-n)\} < 0.$$

Es ist, da $R(z)$ rational vorausgesetzt wurde:

$$R(z-n) = \delta + \frac{\delta_1}{(z-n)^{p_1}} + \dots \quad (\delta_1 \neq 0 < p_1).$$

Falls nun p_1 gerade und $\Im\{\delta_1\} > 0$, so führt die Auswahl $\Im\{\kappa\} > 0$ und bei $\Im\{\delta_1\} < 0$ führt $\Im\{\kappa\} < 0$ zu $|\mu_n^{(1)}(z)| < 1$. Ist dagegen p_1 ungerade und $\Im\{\delta_1\} > 0$, so muß $\Im\{\kappa\} < 0$ und bei $\Im\{\delta_1\} < 0$ muß $\Im\{\kappa\} > 0$ gewählt werden. Zusammengefaßt: κ muß so festgesetzt werden, daß:

$$(-1)^{p_1} \Im\{\delta_1\} \Im\{\kappa\} > 0;$$

hierbei ist $|\mu_n^{(1)}(z)| < 1$ für alle z der komplexen Zahlenebene gewährleistet. Ist aber δ_1 reell, so ist bei Festsetzung eines κ der Wert $|\mu_n^{(1)}(z)| < 1$ nur für die obere oder untere Halbebene: Bei κ mit:

$$(-1)^{p_1} \delta_1 \Im\{\kappa\} \Im\{z\} > 0$$

ist

$$|\mu_n^{(1)}(z)| < 1$$

gewährleistet.

Abschließend werde hier noch nachgewiesen, daß die Bedingungen von Satz 1a erfüllt werden: Die Bedingungen **a)** und **b)** treffen gewiß zu, wenn man die oben angegebenen Forderungen bzgl. der Wahl von κ erfüllt. Weiter ist:

$$\varrho_n^{(1)*}(z) = \frac{\sqrt{R(z-n) + \frac{1}{4}} - \sqrt{\delta + \frac{1}{4}}}{\sqrt{R(z-n) + \frac{1}{4}} + \sqrt{\delta + \frac{1}{4}}}$$

$$\varrho_n^{(2)*}(z) = \frac{\sqrt{R(z-n) + \frac{1}{4}} + \sqrt{\delta + \frac{1}{4}}}{\sqrt{R(z-n) + \frac{1}{4}} - \sqrt{\delta + \frac{1}{4}}}$$

und

$$\begin{aligned} q_n^{(2)*}(z) - q_n^{(1)*}(z) &= \frac{4}{R(z-n)-\delta} \sqrt{R(z-n) + \frac{1}{4}} \sqrt{\delta + \frac{1}{4}} \\ &= \frac{4\delta+1}{\delta_1} (z-n)^{p_1} (1+\dots), \end{aligned}$$

woraus die Gültigkeit der Bedingungen **c)** bis **g)** zu ersehen ist.

22. Auch der Fall

$$g(z) = \frac{R(z)}{1+g(z+1)}$$

kann leicht behandelt werden und zwar wird

$$\lambda = \kappa = -\frac{1}{2} + \sqrt{\delta + \frac{1}{4}}$$

mit

$$\Re\{\kappa\} > -\frac{1}{2}$$

gesetzt. Der Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(z)}{1 + \frac{R(z+1)}{1 + \frac{R(z+n-1)}{1 + \frac{R(z+n)}{1 + \kappa}}}} \end{aligned}$$

führt dann auf eine Lösung $g(z)$ der Differenzengleichung, da die entsprechenden Überlegungen zu **20.** gelten. Im Falle $\delta < -\frac{1}{4}$ ist wegen

$$R(z+n) = \delta + \frac{\delta_1}{(z+n)^{p_1}} + \dots$$

etwas abzuändern: Hier spielt p_1 keine Rolle. κ muß so gewählt werden, daß

$$\Im\{\delta_1\} \Im\{\kappa\} > 0$$

und falls δ_1 reell ist, muß entsprechend

$$\delta_1 \Im\{z\} \Im\{\kappa\} < 0$$

genommen werden; d. h. auch hier konvergiert die Entwicklung für jedes der beiden κ mindestens in einer durch die reelle Achse begrenzten Halbebene.

23. Zusammenfassend kann also folgender Satz formuliert werden:

Satz 2a. *Hat die nichtkonstante rationale Funktion $R(z)$ bei $z = \infty$ die Entwicklung*

$$(24) \quad R(z) = \delta + \frac{\delta_1}{z^{p_1}} + \dots \quad (\delta \neq -\frac{1}{4}, \delta_1 \neq 0 < p_1)$$

und wird gesetzt

$$(25) \quad \kappa = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\delta + \frac{1}{4}},$$

so ist

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(z-1)}{1 + \frac{R(z-2)}{1 + \frac{R(z-n+1)}{1 + \frac{R(z-n)}{1 + \kappa}}}} \\ \text{bzw. b) } g(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(z)}{1 + \frac{R(z+1)}{1 + \frac{R(z+n-1)}{1 + \frac{R(z+n)}{1 + \kappa}}}} \end{array} \right.$$

die Darstellung einer meromorphen Lösung der Differenzengleichung

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } f(z+1) = \frac{R(z)}{1 + f(z)} \\ \text{bzw. b) } g(z) = \frac{R(z)}{1 + g(z+1)}, \end{array} \right.$$

die in der ganzen Ebene konvergiert, wenn erstens bei dem Fall, daß δ nicht $\delta \leq -\frac{1}{4}$ erfüllt, κ so ausgewählt wird, daß

$$(28) \quad \Re\{\kappa\} > -\frac{1}{2}$$

erfüllt ist, zweitens bei dem Fall, daß $\delta < -\frac{1}{4}$ und $\Im\{\delta_1\} \neq 0$, κ so ausgewählt wird, daß

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } (-1)^{p_1} \Im\{\delta_1\} \Im\{\kappa\} > 0 \\ \text{bzw. b) } \Im\{\delta_1\} \Im\{\kappa\} > 0 \end{array} \right.$$

erfüllt ist. Falls $\delta < -\frac{1}{4}$ und δ_1 reell ist, konvergiert (26) mindestens in einer oberen oder unteren z -Halbebene, wenn κ entsprechend der Ungleichung

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } (-1)^{p_1} \delta_1 \Im\{z\} \Im\{\kappa\} > 0 \\ \text{bzw. b) } \delta_1 \Im\{z\} \Im\{\kappa\} < 0 \end{array} \right.$$

festgelegt wird. Ist $R(z)$ eine Konstante: $R(z) \equiv \delta$, so ist mit (26) bei beliebiger Wahl von κ aus (25) eine Lösung von (27) gewonnen.

24. Bei der praktischen Anwendung der Formel (26) ist es zweckmäßig, von folgendem (nur für den Fall a) angegebenen) Verfahren Gebrauch zu machen: Es wird gesetzt

$$f_n^*(z) = \frac{A_n^*(z)}{B_n^*(z)} = \frac{R(z-1)}{1 + \frac{R(z-2)}{1 + \frac{R(z-n+1)}{1 + R(z-n)}}}$$

wobei

$$(31) \quad \begin{cases} A_0^*(z) \equiv 0, & A_1^*(z) = R(z-1), & A_n^*(z) = A_{n-1}^*(z) + R(z-n)A_{n-2}^*(z) \\ B_0^*(z) \equiv 1, & B_1^*(z) \equiv 1, & B_n^*(z) = B_{n-1}^*(z) + R(z-n)B_{n-2}^*(z) \end{cases}$$

($n \geq 2$). Hieraus gewinnt man danach die gesuchten Näherungsbrüche, indem man in

$$f_n(z) = \frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \frac{R(z-1)}{1 + \frac{R(z-1)}{1 + \frac{R(z-n+1)}{1 + \frac{R(z-n)}{1 + \kappa}}}}$$

mit

$$(32) \quad \begin{cases} A_n(z) = A_n^*(z) + \kappa A_{n-1}^*(z) \\ B_n(z) = B_n^*(z) + \kappa B_{n-1}^*(z) \end{cases} \quad (n \geq 1)$$

einsetzt.

In vielen Fällen konvergiert schon die Folge der $f_n^*(z)$ gegen die Lösung $f(z)$, wie die bekannte⁹⁾ THIELESCHE Kettenbruchentwicklung lehrt; in gewissen Fällen aber konvergiert die THIELESCHE Entwicklung $f_n^*(z)$ nicht, die Folge der $f_n(z)$ aber wohl gegen eine Lösung $f(z)$ der Differenzengleichung (27). Triviales Beispiel hierzu: $R(z) \equiv -1$.

Interessant ist die Frage, ob im Falle $\delta < -\frac{1}{4}$, $\Im\{\delta_1\} = 0$ die Entwicklung (26) bei gewissen Funktionen auch über den in Satz 2a benannten Mindestkonvergenzbereich hinaus konvergiert. Beispielsweise werde eine Entwicklung zahlenmäßig angegeben: Die Funktion

$$R(z) = -1,25 + z^{-1}$$

werde in den beiden Punkten

$$z = -10 + i \quad \text{und} \quad z = -10 - i$$

mit $\kappa = -0,5 - i$ nach (31) bzw. (32) ausgewertet. Es ergibt sich etwa:

$$\begin{array}{ll} f_1(-10+i) = -0,538 - 1,074i & f_1(-10-i) = -0,542 - 1,068i \\ f_2(-10+i) = -0,438 - 1,011i & f_2(-10-i) = -0,466 - 1,056i \\ f_3(-10+i) = -0,514 - 1,016i & f_3(-10-i) = -0,509 - 1,008i \\ f_4(-10+i) = -0,505 - 1,082i & f_4(-10-i) = -0,521 - 1,060i \end{array}$$

Nach Satz 2 müssen die $f_v(z)$ mindestens in $\Re\{z\} > 0$ also für $z = -10 + i$ konvergieren ($p_1 = 1$, $\delta_1 = 1$, $\Im\{\kappa\} < 0$). Die geometrische Deutung obiger Näherungswerte schließt bei allen Vorbehalten nicht völlig aus, daß die $f_v(-10-i)$ in der gleichen Weise wie die $f_v(-10+i)$ konvergieren.

25. Es folgt nun die Behandlung des Falles

$$R(z) = a \frac{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\dots(z-\beta_\mu)}{(z-\gamma_1)(z-\gamma_2)\dots(z-\gamma_\nu)} \quad (a \neq 0)$$

⁹⁾ siehe beispielsweise NÖRLUND [4].

mit $\mu > \nu \geq 0$, bei welchem kein β_λ mit einem γ_λ identisch ist. Hier wird gesetzt

$$\kappa(z, n) = \sqrt[\mu]{a(-n)^{\mu-\nu}} = \kappa_n,$$

wobei die Argumente aller κ_n untereinander gleich sind. Gewiß ist

$$R(z-n) = a(-n)^{\mu-\nu} \left[1 + \frac{1}{n} \{ \sum \beta_\lambda - \sum \gamma_\lambda + z(\nu-\mu) \} + \frac{1}{n^2} (\dots) \right]$$

und hiermit wird (9)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(z-n-1)}{\sqrt[\mu]{a(-n)^{\mu-\nu}} \left[1 + \sqrt[\mu]{a(-n-1)^{\mu-\nu}} \right]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n} (\dots)}{\frac{1}{\sqrt[\mu]{a(-n)^{\mu-\nu}}} + \sqrt[\mu]{\frac{-n-1}{-n}}^{\mu-\nu}} = 1$$

und analog auch (10) gleichmäßig konvergierend erreicht. Weiter ist

$$\varphi_n(z, \xi) = \frac{R(z-n)}{\kappa_{n-1}(1 + \kappa_n \xi)};$$

aus

$$\varphi_n(z, \xi) = \frac{a(-n)^{\mu-\nu} \left[1 + \frac{1}{n} \{ \sum \beta_\lambda - \sum \gamma_\lambda + z(\nu-\mu) \} + \frac{1}{n^2} (\dots) \right]}{\sqrt[\mu]{a(-n+1)^{\mu-\nu}} + a\xi \sqrt[\mu]{(n^2-n)^{\mu-\nu}}}$$

folgt

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\xi}.$$

Dann wird

$$\varrho_n^{(1)}(z) = -\frac{1}{2\kappa_n} + \sqrt{\frac{R(z-n)}{\kappa_n \kappa_{n-1}} + \frac{1}{4\kappa_n^2}} \quad (\arg \sqrt{} \approx 0)$$

und

$$\varrho_n^{(2)}(z) = -\frac{1}{2\kappa_n} - \sqrt{\frac{R(z-n)}{\kappa_n \kappa_{n-1}} + \frac{1}{4\kappa_n^2}} \quad (\arg \sqrt{} \approx 0)$$

mit

$$\mu_n^{(1)}(z) = -\frac{\kappa_n R(z-n)}{\kappa_{n-1}(1 + \kappa_n \varrho_n^{(1)}(z))^2}.$$

(Mit $\arg \sqrt{} \approx 0$ sei derjenige Wurzelwert charakterisiert, dessen Argument dem Wert Null am nächsten kommt.) Weiter ist

$$\varrho_n^{(1)*}(z) = \frac{-1 - \frac{1}{2\kappa_n} + \sqrt{\frac{R(z-n)}{\kappa_n \kappa_{n-1}} + \frac{1}{4\kappa_n^2}}}{1 - \frac{1}{2\kappa_n} + \sqrt{\frac{R(z-n)}{\kappa_n \kappa_{n-1}} + \frac{1}{4\kappa_n^2}}} \quad (\arg \sqrt{} \approx 0)$$

$$\varrho_n^{(2)*}(z) = \frac{-1 - \frac{1}{2\kappa_n} - \sqrt{\frac{R(z-n)}{\kappa_n \kappa_{n-1}} + \frac{1}{4\kappa_n^2}}}{1 - \frac{1}{2\kappa_n} - \sqrt{\frac{R(z-n)}{\kappa_n \kappa_{n-1}} + \frac{1}{4\kappa_n^2}}} \quad (\arg \sqrt{} \approx 0)$$

$$\varrho_n^{(2)*}(z) - \varrho_n^{(1)*}(z) = \frac{4 \sqrt{\frac{R(z-n)}{\kappa_n \kappa_{n-1}} + \frac{1}{4\kappa_n^2}}}{\frac{R(z-n)}{\kappa_n \kappa_{n-1}} + \frac{1}{\kappa_n} - 1} \quad (\arg \sqrt{} \approx 0).$$

Die Vorausbedingungen 8. treffen gewiß zu; dabei ist $M = -1$. Es wird also Satz 1a anzuwenden sein. Hierzu muß nachgewiesen werden, daß die zusätzlichen Bedingungen 16. erfüllt sind. Die oben zusammengestellten Formeln sollen dem dienen: Es zeigt sich schnell, daß den zusätzlichen Bedingungen a) und c) bis g) genüge getan wird. Besondere Beachtung verdient Bedingung b). Hier ist die Funktion $\mu_n^{(1)}(z)$ näher zu untersuchen:

$$\mu_n^{(1)}(z) = \frac{-1}{\frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n R(z-n)} \left(\frac{1}{2} + \kappa_n \sqrt{\frac{R(z-n)}{\kappa_n \kappa_{n-1}} + \frac{1}{4 \kappa_n^2}} \right)^2} \quad (\arg \sqrt{} \approx 0)$$

$$= \frac{-1}{1 + \frac{\kappa_{n-1}}{2 \kappa_n R(z-n)} + \frac{\kappa_{n-1}}{R(z-n)} \sqrt{\frac{R(z-n)}{\kappa_n \kappa_{n-1}} + \frac{1}{4 \kappa_n^2}}} \quad (\arg \sqrt{} \approx 0),$$

oder

$$\mu_n^{(1)}(z) = \frac{-1}{1 + \frac{\kappa_{n-1}}{2 \kappa_n R(z-n)} + \sqrt{\frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n R(z-n)} + \frac{\kappa_{n-1}^2}{4 \kappa_n^2 R^2(z-n)}}} \quad (\arg \sqrt{} \approx -\arg \kappa_n)$$

bezw.

$$\mu_n^{(1)}(z) = \frac{-1}{1 + t + \sqrt{t^2 + 2t}} \quad (\arg \sqrt{} \approx -\arg \kappa_n)$$

mit

$$t = \frac{\kappa_{n-1}}{2 \kappa_n R(z-n)}.$$

Die Funktion

$$t' = \frac{-1}{1 + t + \sqrt{t^2 + 2t}} \quad \text{bezw.} \quad t = -1 - \frac{1}{2} \left(t' + \frac{1}{t'} \right)$$

bildet die doppelt durchlaufene Strecke $-2 \leq t \leq 0$ auf $|t'| = 1$ ab, wobei $t = 0 \rightarrow -1$ und $-2 \rightarrow +1$. Offenbar ist $|t'| < 1$, wenn (für $|t| < 1$):

$$\Re \{ \sqrt{t^2 + 2t} \} > 0$$

gewählt wird. Dies bedeutet aber, da $\arg \sqrt{} \approx -\arg \kappa_n$, daß $|\mu_n^{(1)}(z)| < 1$ wird, wenn

$$\Re \{ \kappa_n \} > 0$$

gewählt ist. In diesem Falle gibt es zu jedem abgeschlossenen Gebiet $\mathfrak{G}'$ der z -Ebene einen Index, von dem an alle $|\mu_n^{(1)}(z)| < 1$.

Im Falle, daß $a(-n)^{\alpha-\nu}$ negativ ist, sind genauere Unterscheidungen nötig: Es muß dann in $\mathfrak{G}'$

$$-\pi < \arg t < +\pi$$

bleiben, und da $\arg \kappa_{n-1} = \arg \kappa_n$, muß sein

$$-\pi < \arg R(z-n) < +\pi$$

oder — aus der Formel für $R(z-n)$ folgend — in $\mathfrak{G}'$ muß für hin-

reichend große n sein:

$$\text{oder} \quad \Im \{ \sum \beta_\lambda - \sum \gamma_\lambda + z(\nu - \mu) \} < 0$$

$$\text{bzw. anderenfalls} \quad (\mu - \nu) \Im \{ z \} > \Im \{ \sum \beta_\lambda - \sum \gamma_\lambda \}$$

$$\text{Bei} \quad (\mu - \nu) \Im \{ z \} < \Im \{ \sum \beta_\lambda - \sum \gamma_\lambda \}.$$

$$\text{liegt} \quad (\mu - \nu) \Im \{ z \} > \Im \{ \sum \beta_\lambda - \sum \gamma_\lambda \}$$

$$t = \frac{\kappa_{n-1}}{2 \kappa_n R(z-n)}$$

im dritten Quadranten des Einheitskreises und ebenfalls der Wert $t^2 + 2t$. $\sqrt{t^2 + 2t}$ befindet sich dann entweder im zweiten oder vierten Quadranten. Da aber

$$\arg \sqrt{} \approx -\arg \kappa_n \quad \text{und} \quad \arg \kappa_n = \pm \frac{\pi}{2}$$

ist, muß zur Erfüllung von

$$\Re \{ \sqrt{t^2 + 2t} \} > 0$$

das Argument $\arg \kappa_n = +\frac{\pi}{2}$, also $\Im \{ \kappa_n \} > 0$ gewählt werden, wenn $|\mu_n^{(1)}(z)| < 1$ sein soll. Analog muß bei

$$(\mu - \nu) \Im \{ z \} < \Im \{ \sum \beta_\lambda - \sum \gamma_\lambda \}$$

$\kappa_n = \sqrt{a(-n)^{\mu-\nu}}$ so gewählt werden, daß $\Im \{ \kappa_n \} < 0$ ist.

26. Die Besprechung der Lösung von

$$g(z) = \frac{R(z)}{1 + g(z+1)}$$

geht aus von

$$\lambda(z, n) = \sqrt{a n^{\mu-\nu}} = \lambda_n,$$

wobei die Argumente aller λ_n untereinander gleich seien. Auch hier sind die Vorausbedingungen **8.** erfüllt, wobei sich

$$\Psi(\xi) = \frac{1}{\xi} \quad \text{und} \quad N = -1$$

ergibt. Da demnach wieder Satz 1 a verwendet werden muß, sind auch die zusätzlichen Bedingungen heranzuziehen. **a)** und **c)** bis **g)** treffen ohne weiteres zu; es fehlt nur noch der Nachweis, daß **b)** durch geeignete Wahl der λ_n erfüllt wird. Analog zu vorhin ist hier

$$\nu_n^{(1)}(z) = \frac{-1}{1 + \frac{\lambda_{n-1}}{2 \lambda_n R(z+n)} + \sqrt{\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n R(z+n)} + \frac{\lambda_{n-1}^2}{4 \lambda_n^2 R^2(z+n)}}} \quad (\arg \sqrt{} \approx -\arg \lambda_n)$$

und $|\nu_n^{(1)}(z)| < 1$, wenn $\Re \{ \sqrt{} \} > 0$ ist; dies ist der Fall bei

$$\Re \{ \lambda_n \} > 0.$$

Wenn $an^{\mu-\nu}$ negativ ist, wird ebenso wie unter 25. eine genauere Unterscheidung nötig, bei welcher von der Formel

$$R(z+n) = an^{\mu-\nu} \left[1 - \frac{1}{n} \{ \sum \beta_\lambda - \sum \gamma_\lambda + z(\nu - \mu) \} + \frac{1}{n^2} (\dots) \right]$$

Gebrauch gemacht wird.

Falls

$$(\mu - \nu) \Im \{z\} > \Im \{ \sum \beta_\lambda - \sum \gamma_\lambda \}, \text{ ist } \Im \{ \lambda_n \} < 0$$

und falls

$$(\mu - \nu) \Im \{z\} < \Im \{ \sum \beta_\lambda - \sum \gamma_\lambda \}, \text{ ist } \Im \{ \lambda_n \} > 0$$

zu wählen.

27. Das unter 25. und 26. bewiesene läßt sich in folgendem Satz zusammenfassen:

Satz 2b. *Besitzt die rationale Funktion $R(z)$ bei $z = \infty$ einen Pol, so läßt sie sich darstellen durch*

$$(33) \quad R(z) = a \frac{(z - \beta_1)(z - \beta_2) \dots (z - \beta_\mu)}{(z - \gamma_1)(z - \gamma_2) \dots (z - \gamma_\nu)} \quad (a \neq 0 \leq \nu < \mu).$$

Wird gesetzt:

$$(34) \quad \begin{cases} \text{a) } x_n = \sqrt[\mu-\nu]{a(-n)^{\mu-\nu}} \\ \text{bzw. b) } \lambda_n = \sqrt[\mu-\nu]{an^{\mu-\nu}}, \end{cases}$$

so ist

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(z-1)}{1 + \frac{R(z-2)}{1 + \frac{R(z-n+1)}{1 + \frac{R(z-n)}{1 + x_n}}}} \\ \text{bzw. b) } g(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(z)}{1 + \frac{R(z+1)}{1 + \frac{R(z+n-1)}{1 + \frac{R(z+n)}{1 + \lambda_n}}}} \end{array} \right.$$

die Darstellung einer meromorphen Lösung der Differenzengleichung

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } f(z+1) = \frac{R(z)}{1+f(z)} \\ \text{bzw. b) } g(z) = \frac{R(z)}{1+g(z+1)}, \end{array} \right.$$

die in der ganzen Ebene konvergiert, wenn die

$$\begin{cases} \text{a) } x_n \text{ bei nichtnegativem } a(-n)^{\mu-\nu} \text{ und die} \\ \text{b) } \lambda_n \text{ bei nichtnegativem } an^{\mu-\nu} \end{cases}$$

so ausgewählt werden, daß

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \Re \{x_n\} > 0 \\ \text{bzw. b) } \Re \{\lambda_n\} > 0. \end{array} \right.$$

Bei negativem $a(-n)^{\mu-\nu}$ bezw. $an^{\mu-\nu}$ konvergiert (35) mindestens in einer Halbebene, nämlich:

$$(38) \quad \begin{cases} \text{in } \Im\{z\} > \frac{\Im\{\sum \beta_\lambda - \sum \gamma_\lambda\}}{\mu - \nu} \text{ falls a) } \Im\{z_n\} > 0 \text{ bezw. b) } \Im\{\lambda_n\} < 0 \\ \text{in } \Im\{z\} < \frac{\Im\{\sum \beta_\lambda - \sum \gamma_\lambda\}}{\mu - \nu} \text{ falls a) } \Im\{z_n\} < 0 \text{ bezw. b) } \Im\{\lambda_n\} > 0. \end{cases}$$

Interessant ist, daß im Falle (38) bei rationalen Funktionen, welche die reelle Achse invariant lassen, diese Achse auch wieder (wie im Satz 2a) die Grenze des Mindestkonvergenzbereiches der Kettenbruchentwicklung darstellt.

§ 2.

Reduktion der Differenzgleichung $F(z+1) = \frac{R_1(z)F(z) + R_2(z)}{F(z) + R_3(z)}$.

28. Die Funktionen $R_\nu(z)$ ($\nu = 1, 2, 3$) seien rational. Der Fall

$$(39) \quad F(z+1) = R_1(z)F(z) + R_2(z)$$

interessiert hier nicht weiter. Die Differenzgleichung

$$(40) \quad F(z+1) = \frac{R_1(z)F(z) + R_2(z)}{F(z) - R_1(z-1)}$$

läßt sich lösen, indem man aus der (mit der F -Funktion leicht angebbaren) Hilfsfunktion $\varphi(x)$, welche durch

$$(41) \quad \varphi(x+1) = [R_1(2x)R_1(2x-1) + R_2(2x)]\varphi(x)$$

bestimmt wird, $F(z)$ nach

$$F(z) = \frac{\varphi\left(\frac{z+1}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{z}{2}\right)} + R_1(z-1)$$

ermittelt. Dies führt bei der Spezialisierung $R_1(z) \equiv 0$ auf die bekannte Lösung¹⁰⁾.

29. Es wird gesetzt:

$$(42) \quad R(z) = \frac{R_2(z) - R_1(z)R_3(z)}{[R_1(z-1) + R_3(z)][R_1(z) + R_3(z+1)]},$$

was bei der Ausschließung des Falles (40) zu einer rationalen Funktion $R(z)$ führt. Unter der „Reduzierten“ zu (3) wird nun

$$f(z+1) = \frac{R(z)}{1+f(z)}$$

verstanden. Wie in den Sätzen 2a und 2b angegeben, existiert außer

¹⁰⁾ siehe NÖRLUND [4], S. 115. A. MAYER [2].

im Falle $\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = -\frac{1}{4}$ mindestens eine Lösung $f_0(z)$ der reduzierten Gleichung. Dann ist

$$F_0(z) = f_0(z) [R_1(z-1) + R_3(z)] + R_1(z-1)$$

eine Lösung von (3). Dies läßt sich leicht nachrechnen:

$$\begin{aligned} F_0(z+1) &= f_0(z+1) [R_1(z) + R_3(z+1)] + R_1(z) \\ &= \frac{R_2(z) - R_1(z) R_3(z)}{[R_1(z-1) + R_3(z)] [R_1(z) + R_3(z+1)]} \cdot \frac{R_1(z) + R_3(z+1)}{1 + \frac{F_0(z) - R_1(z-1)}{R_1(z-1) + R_3(z)}} + R_1(z) \\ &= \frac{R_2(z) - R_1(z) R_3(z)}{F_0(z) + R_3(z)} + R_1(z) = \frac{R_1(z) F_0(z) + R_2(z)}{F_0(z) + R_3(z)}. \end{aligned}$$

30. Umgekehrt muß, wenn $F(z)$ eine Lösung von (3) ist, $f(z)$ eine Lösung der Reduzierten sein. Jede Lösung $f(z)$ der Reduzierten führt mit

$$f(z) = f_0(z) \left(1 + \frac{1}{h(z)}\right)$$

auf die Gleichung

$$(43) \quad h(z+1) = -\frac{1 + f_0(z)}{f_0(z)} h(z) - 1.$$

$f_0(z)$ wird hierin erzielt, wenn für $h(z)$ die triviale Lösung $h(z) \equiv \infty$ eingesetzt wird.

Da in die allgemeine Lösung von $h(z)$:

$$h(z) = h_0(z) + k_0(z) \pi(z),$$

wo bei $k_0(z)$ eine herausgegriffene Lösung der Gleichung

$$(44) \quad k(z+1) = -\frac{1 + f_0(z)}{f_0(z)} k(z)$$

ist) die periodische Funktion $\pi(z)$ eingeht, läßt sich die Gesamtheit der Lösungen von (3) so angeben, daß $\pi(z)$ alle möglichen periodischen Funktionen mit der Periode 1 durchläuft.

31. Dies wird zusammengefaßt in

Satz 3a. Die Gesamtheit aller meromorphen Lösungen der Differenzgleichung

$$(45) \quad F(z+1) = \frac{R_1(z) F(z) + R_2(z)}{F(z) + R_3(z)}$$

mit rationalen $R_v(z)$ ist durch

$$(46) \quad F(z) = f_0(z) \left[1 + \frac{1}{h_0(z) + k_0(z) \pi(z)}\right] [R_1(z-1) + R_3(z)] + R_1(z-1)$$

gegeben, wobei $f_0(z)$ die Kettenbruchentwicklung der Lösung von

$$f_0(z+1) = \frac{R(z)}{1 + f_0(z)} \quad (R(z) \text{ siehe (42), } R(\infty) \neq -\frac{1}{4})$$

entsprechend Satz 2a oder 2b ist. $h_0(z)$ bzw. $k_0(z)$ ist je eine meromorphe Lösung von (43) bzw. (44). $\pi(z)$ durchläuft die Gesamtheit aller meromorphen Funktionen mit der Periode 1 (evtl. $\pi(z) \equiv \infty$). Im Falle $R(z) \equiv \infty$ ist

$$(47) \quad F(z) = \varphi\left(\frac{z+1}{2}\right) \varphi^{-1}\left(\frac{z}{2}\right) + R_1(z-1),$$

wobei $\varphi(x)$ die Gesamtheit aller meromorphen Lösungen von (41) ist.

Die Analogie zu Satz 3a werde der besseren Übersicht wegen getrennt formuliert:

Satz 3b. Die Gesamtheit aller meromorphen Lösungen der Differenzgleichung

$$(48) \quad G(z) = \frac{R_1(z) G(z+1) + R_2(z)}{G(z+1) + R_3(z)}$$

mit rationalen $R_v(z)$ ist durch

$$(49) \quad G(z) = g_0(z) \left[1 + \frac{1}{m_0(z) + n_0(z) \pi(z)} \right] [R_1(z) + R_3(z-1)] + R_1(z)$$

gegeben, wobei $g_0(z)$ die Kettenbruchentwicklung der Lösung von

$$(50) \quad g_0(z) = \frac{R(z)}{1 + g_0(z+1)} \quad \text{mit}$$

$$R(z) = \frac{R_2(z) - R_1(z) R_3(z)}{[R_1(z+1) + R_3(z)] [R_1(z) + R_3(z-1)]} \quad (R(\infty) \neq -\frac{1}{4})$$

entsprechend Satz 2a oder 2b ist. $m_0(z)$ bzw. $n_0(z)$ ist je eine meromorphe Lösung von

$$(51) \quad m(z) = -\frac{1 + g_0(z+1)}{g_0(z+1)} m(z+1) - 1$$

bzw.

$$(52) \quad n(z) = -\frac{1 + g_0(z+1)}{g_0(z+1)} n(z+1).$$

Bei $R(z) \equiv \infty$ ergibt sich die Lösung (47). $[R_1(z+1) \rightarrow R_1(z)!]$.

32. Formel (45) kann auch mit

$$F(z) = \frac{-R_3(z) F(z+1) + R_2(z)}{F(z) - R_1(z)}$$

angegeben und nach Satz 3b gelöst werden, wobei $R(z)$ in (50) mit (42) identisch ist. Interessant ist nun, daß die Kettenbruchentwicklung der Reduzierten nach Satz 2b in der vollen Ebene konvergiert, wenn

$$(53) \quad \begin{cases} \text{bei } a > 0: & \text{die Entwicklung nach Satz 3b} \\ \text{bei } a < 0, \mu - \nu \text{ ungerade:} & \text{die Entwicklung nach Satz 3a} \end{cases}$$

benutzt wird. Bei

$$a < 0, \mu - \nu \text{ gerade}$$

allerdings bleibt dieser Ausweg versperrt.

IV. Der Zusammenhang zwischen der Differenzengleichung
 $F(z+1) = \frac{R_1(z)F(z) + R_2(z)}{F(z) + R_3(z)}$ und homogenen Differenzengleichungen
zweiter Ordnung.

33. Die Funktion $u(z)$ sei durch die Gleichung

$$(54) \quad u(z+2) + p(z)u(z+1) + q(z)u(z) = 0$$

gegeben, in welcher $p(z)$ und $q(z)$ beliebige rationale Funktionen sind. Wenn $F(z)$ durch

$$(55) \quad F(z) = \frac{u(z+1)}{u(z)}$$

definiert ist, muß sein:

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(z+1) = \frac{-p(z)F(z) - q(z)}{F(z)} \\ \text{bzw.} \quad F(z) = \frac{-q(z)}{F(z+1) + p(z)}, \end{array} \right.$$

wie auch umgekehrt jede Lösung von (56) vermöge (55) auf eine Lösung von (54) führt. Die Reduzierte zu (56) ist

$$\left\{ \begin{array}{l} f(z+1) = -\frac{q(z)}{p(z)p(z-1)} \cdot \frac{1}{1+f(z)} \\ \text{bzw.} \quad g(z) = -\frac{q(z)}{p(z)p(z-1)} \cdot \frac{1}{1+g(z+1)}. \end{array} \right.$$

Die Kettenbruchentwicklung (26) bzw. (35) dieser Funktion konvergiert stets außer bei $p(z) \equiv 0$ oder bei

$$(57) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{q(z)}{p(z)^2} = \frac{1}{4}$$

entweder in der vollen oder mindestens einer halben Ebene gegen eine meromorphe Funktion. Sie lautet

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{u(z+1)}{u(z)} = -p(z-1) \\ \quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q(z-1)}{p(z-2) - \frac{q(z-2)}{p(z-3) - \frac{q(z-3)}{p(z-n) - \frac{q(z-n)}{p(z-n-1)(1+\kappa_n)}}}} \\ \text{bzw.} \quad \frac{u(z+1)}{u(z)} \\ \quad = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-q(z)}{p(z) - \frac{q(z+1)}{p(z+1) - \frac{q(z+n)}{p(z+n-1) - \frac{q(z+n)}{p(z+n)(1+\lambda_n)}}}} \end{array} \right.$$

wobei

$$(59) \left\{ \begin{array}{l} \text{für } -\frac{q(z)}{p(z)p(z-1)} = \delta + \frac{\delta_1}{z^{\rho_1}} + \dots : \kappa_n = \lambda_n = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\delta + \frac{1}{4}} \\ \text{bzw. für } -\frac{q(z)}{p(z)p(z-1)} \\ = a \frac{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\dots(z-\beta_\mu)}{(z-\gamma_1)(z-\gamma_2)\dots(z-\gamma_\nu)} (\mu > \nu) : \begin{cases} \kappa_n = \pm \sqrt{a(-n)^{\mu-\nu}} \\ \lambda_n = \pm \sqrt{a n^{\mu-\nu}}, \end{cases} \end{array} \right.$$

und die Auswahl der Wurzeln nach den in Satz 2 a bzw. 2 b angegebenen Bedingungen getroffen ist und dann auf die dementsprechenden Konvergenzbereiche führt. Insbesondere kann der unter 32. herausgestellte Fall, daß außer bei $a < 0$ und gerades $\mu - \nu$ stets eine in der vollen Ebene gegen eine meromorphe Funktion konvergierende Kettenbruchentwicklung existiert, auch hier angemerkt werden.

34. Wird die Gleichung mit konstanten Koeffizienten betrachtet:

$$u(z+2) + pu(z+1) + qu(z) = 0,$$

so ergibt sich aus (58) mit $\kappa = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{q}{p^2}}$

$$\frac{u(z+1)}{u(z)} = -p + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q}{p - \frac{q}{\mu - \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{q}{p^2}}}} = -\frac{p}{2} \mp \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$p - \frac{q}{p \left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{q}{p^2}} \right)}$$

bzw.

$$\frac{u(z+1)}{u(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-q}{p - \frac{q}{\mu - \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{q}{p^2}}}} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

$$p - \frac{q}{p \left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{q}{p^2}} \right)}$$

also gerade die beiden Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0,$$

je nachdem welches κ gewählt wird. Hier sind die umfangreichen Konvergenzuntersuchungen, die ja die Einengung bei der Wurzel von κ mit sich brachten, überflüssig; beide Wurzeln sind zugelassen.

Das THIELESche Kettenbruchverfahren gibt für

$$\frac{1}{4} - \frac{q}{p^2} < 0$$

keinen sinnvollen trivialen Wert (Divergenz des Kettenbruchs!), während beim hier angewandten Verfahren auch dieser Fall miteingefasst ist.

35. Stärker noch als im Beispiel **34.** zeigt sich der Vorzug der als verallgemeinerte Kettenbrüche aufzufassenden Entwicklungen (58), wenn $p(z)$ und $q(z)$ beliebige rationale Funktionen mit endlichem Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow \infty} p(z) = p \quad \lim_{z \rightarrow \infty} q(z) = q$$

sind: Ist $p^2 - 4q$ nichtnegativ, so konvergieren die Entwicklungen (58) in der vollen Ebene. In diesem Falle konvergieren auch die THIELESCHEN Kettenbrüche in der vollen Ebene — wenn auch nicht so schnell. Es zeigt sich nebenher, daß bei nichtnegativem $p^2 - 4q$ in (58): $x_n = 0$ gesetzt werden kann, ohne daß die Konvergenzeigenschaft beeinträchtigt wird.

Ist aber $p^2 - 4q$ negativ, so konvergieren die Entwicklungen (58) bei $\Im\{\delta_1\} \neq 0$ in der vollen Ebene und bei $\Im\{\delta_1\} = 0$ zum mindesten in einer Halbebene. In diesem Falle konvergieren die THIELESCHEN Kettenbruchentwicklungen nur unter gewissen weiteren Zusatzbedingungen für $p(z)$ und $q(z)$ — dann allerdings in der vollen Ebene.

Ist $p^2 - 4q = 0$, so haben sich die Entwicklungen (58) nach den in dieser Arbeit angewandten Methoden noch nicht als konvergent erweisen lassen, während die THIELESCHESCHE Entwicklung dann mitunter konvergiert.

Abschließend kann festgestellt werden, daß sich beide Verfahren bei $\lim_{z \rightarrow \infty} p(z) = p$ und $\lim_{z \rightarrow \infty} q(z) = q$ untereinander ergänzen.

36. Wenn im Falle normaler Differenzengleichungen beide Verfahren mit gewissen Vor- und Nachteilen einander gegenüberstehen, so besitzen die Entwicklungen (58) beim Übergang zu nichtnormalen Differenzengleichungen dem THIELESCHEN Kettenbruchverfahren, das abgesehen von gewissen Ausnahmefällen nicht als konvergent zu erweisen ist, gegenüber den Vorzug, stets zu konvergenten Lösungen zu führen, deren Konvergenzbereich im allgemeinen die volle Zahlenebene, in gewissen Sonderfällen aber zum mindesten eine Halbebene umfaßt.

37. Zuletzt sei noch festgestellt, daß jede Lösung $u(z)$ von

$$u(z+2) + [R_1(z) + R_3(z+1)] u(z+1) + [R_1(z)R_3(z) - R_2(z)] u(z) = 0$$

mit

$$F(z) = - \frac{u(z+1)}{u(z)} - R_3(z)$$

zu einer Lösung von

$$F(z+1) = \frac{R_1(z)F(z) + R_2(z)}{F(z) + R_3(z)}$$

führt, wie man auch umgekehrt von einer Lösung $F(z)$ der letzten Differenzengleichung mit einer Lösung der Gleichung

$$u(z+1) = - [F(z) + R_3(z)] u(z)$$

zu einer Lösung $u(z)$ der ersten Differenzengleichung gelangt.

Literaturverzeichnis.

T. E. MASON.

- [1] Charakter of the Solutions of certain Functional Equations. Amer. J. Math. **36** (1914).

A. MAYER.

- [2] Konvexe Lösung der Funktionalgleichung $\frac{1}{f(x+1)} = x \cdot f(x)$. Acta math. **70** (1938).

P. MONTEL.

- [3] Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leur applications. Paris (1927).

N. E. NÖRLUND.

- [4] Vorlesungen über Differenzenrechnung. Berlin (1924).

C. F. STEPHENS.

- [5] Nonlinear difference equations analytic in a parameter. Trans. Amer. math. Soc. **64** (1948).

E. STRIDBERG.

- [6] Contributions à l'étude des fonctions algébriко-transcendantes qui satisfont à certaines équations fonctionnelles algébriques. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik **6** (1910), Nr. 15 und 18.

T. N. THIELE.

- [7] Différences réciproques. Overs. danske Vidsk. Selsk. Forhandl. Kopenhagen (1906).
[8] Interpolationsrechnung. Leipzig (1909).

H. TIETZE.

- [9] Über Funktionalgleichungen. deren Lösungen keiner algebraischen Differentialrechnung genügen können. Monatsh. Math. Phys. **16** (1905).

H. TÖPFER.

- [10] Komplexe Iterationsindizes ganzer und rationaler Funktionen. Math. Ann. **121** (1949).

(Eingegangen am 17. Juni 1949.)

Mehrfach ausgeartete Desarguessche Konfigurationen.

Von

Karl Kommerell in Tübingen.

In der letzten Zeit wurden mehrfach, besonders eingehend 1938 von K. MAIER¹⁾, die DESARGUESSchen Konfigurationen behandelt. Bekanntlich gibt es in einer DESARGUESSchen Konfiguration 10 Paare von perspektiven Dreiecken mit 10 Zentren und 10 Achsen. Jede Achse ist die Polare zu dem zugehörigen Zentrum in einem mit der Konfiguration eng verbundenen Polarsystem. Dabei wird in der Literatur durchweg nur der sogenannte allgemeine Fall betrachtet, in dem niemals eine Achse durch sein ihr zugeordnetes Zentrum geht. In der vorliegenden Schrift sollen nun gerade die sogenannten ausgearteten DESARGUESSchen Konfigurationen behandelt werden, wo also mindestens einmal es vorkommt, daß die Achse durch das Zentrum geht. Kommt dies einmal, zweimal, dreimal usw. vor, so soll die Konfiguration einmal, zweimal, dreimal usw. ausgeartet heißen. Es läßt sich zeigen, daß es mehr als dreimalausgeartete DESARGUESSche Konfigurationen nicht gibt. Gerade die letzteren sind von besonderem Interesse, da

sie in der Nichteuklidischen Geometrie eine hübsche Deutung finden und auch in der Modulfigur, wie ich zeigen kann, eine Rolle spielen.

Auf die einfach ausgearteten Konfigurationen gehe ich nicht ein, da hier fast Alles trivial ist und auch nichts besonderes zu bemerken ist.

Wenden wir uns darum sogleich zu den zweimal ausgearteten DESARGUESSchen Konfigurationen. Eine solche ist in Figur 1 dargestellt. Man erhält sie auf

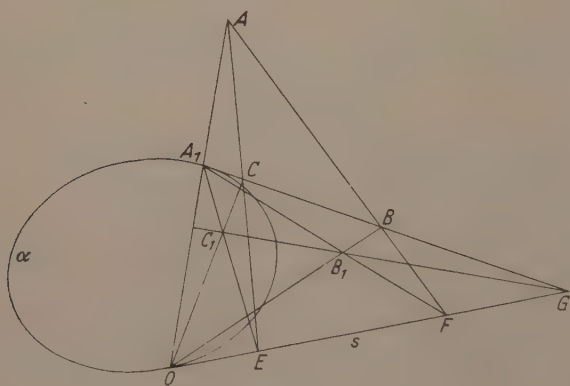


Fig. 1.

¹⁾ K. MAIER, Die DESARGUESSche Konfiguration, Dissertation Tübingen 1938 = Deutsche Mathematik, Bd. 4 (1939), S. 591—641.

die folgende Weise: Eine ebene Perspektive ist bestimmt, wenn das Zentrum O , die Achse s und zwei zusammengehörige Punkte A und A_1 gegeben sind, wobei AA_1 durch O geht. In der bekannten Weise kann dann zu jedem Punkt B der entsprechende B_1 konstruiert werden. Wir lassen nun s durch O gehen, dann ist die Konfiguration mindestens einmal ausgeartet. Zu zwei beliebigen Punkten B und C suchen wir die entsprechenden — wir lassen aber BC durch A_1 gehen, dann wird die Konfiguration im Allgemeinen zweifach ausgeartet sein. Die Konstruktion von B_1 und C_1 erfolgt nun so: AB schneidet die Achse s in F , und A_1B_1 muß auch durch F gehen, darum schneidet OB aus A_1F den Punkt B_1 aus. Entsprechend schneide man AC mit s in E und projiziere C von O aus auf A_1E nach C_1 . Die beiden Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ liegen perspektivisch mit O als Zentrum und s als Achse, darum müssen sich BC und B_1C_1 in einem Punkt G der Achse s treffen. Hier haben wir nun eine DESARGUESCHE Konfiguration von 10 Punkten und 10 Geraden. Auf BC und EF liegen aber vier Konfigurationspunkte, auf jeder anderen Konfigurationsgeraden werden im Allgemeinen nur drei Konfigurationspunkte liegen (man vgl. das weiter unten Gesagte). Durch O und A_1 gehen vier Konfigurationsgeraden, durch jeden anderen Punkt nur drei.

Wir wollen jetzt zeigen, daß jeder Punkt der Konfiguration Zentrum von zwei perspektivischen Dreiecken ist, wobei eine Gerade der Konfiguration die Achse ist. Weiter zeigen wir, daß eine reelle Kurve zweiter Ordnung existiert, in bezug auf die jedes Zentrum eine Polare besitzt, welche die dem Zentrum entsprechende Achse ist. Um das Erste zu beweisen, stellen wir für alle 10 Punkte die Paare von perspektivischen Dreiecken auf und konstruieren die dazugehörige Achse.

Zentrum	Perspektivische Dreiecke	Achse
(1) A	$O B C$ $A_1 F E$	$B_1 C_1 G$
(2) B	$B_1 F G$ $O A C$	$A_1 C_1 E$
(3) C	$A O B$ $E C_1 G$	$A_1 F B_1$
(4) A_1	$A E F$ $O C_1 B_1$	$C B G$
(5) B_1	$O A_1 C_1$ $B F G$	$A C E$
(6) C_1	$E C G$ $A_1 O B_1$	$A F B$

Zentrum	Perspektivische Dreiecke	Achse
(7) O	$A B C$ $A_1 B_1 C_1$	$F E G$
(8) E	$A_1 A F$ $C_1 C G$	$O B_1 B$
(9) F	$A A_1 E$ $B B_1 G$	$O C C_1$
(10) G	$B_1 B F$ $C_1 C E$	$O A_1 A$

Durch diese Tabelle, die aufs Leichteste nachgeprüft werden kann, ist der erste Teil bewiesen.

Wenden wir uns zum zweiten Teil: Wenn es ein Polarsystem gibt, in bezug auf welches jede Achse die Polare zum zugehörigen Zentrum ist, so muß das Polarsystem eine reelle Ordnungskurve α besitzen. Denn die Achse zu O , nämlich s geht durch O und die Achse zu A_1 , nämlich CBG , geht durch A_1 . Die Ordnungskurve α würde also, wenn die Behauptung wahr ist, die Gerade CBG in A_1 und s in O berühren. Dadurch ist aber die Ordnungskurve noch nicht bestimmt. Wenn wir aber noch festsetzen, wie es nach (6) sein müßte, daß zu C_1 die Gerade ABF Polare ist, dann ist α bestimmt. Wir denken uns also jetzt die Figur auf folgende Weise entstanden: Wir nehmen die reelle nicht zerfallende Ordnungskurve α beliebig an und auf ihr die beiden Punkte A_1 und O ebenfalls willkürlich. Die Tangenten in O und A_1 bestimmen den Punkt G . Auf OA_1 wird nun der Punkt A willkürlich gewählt, seine Polare muß dann durch G gehen. Auf ihr wird der Punkt C , willkürlich angenommen, seine Polare, die natürlich durch A gehen muß, schneide A_1G in B und s in F . OB und A_1F schneiden sich

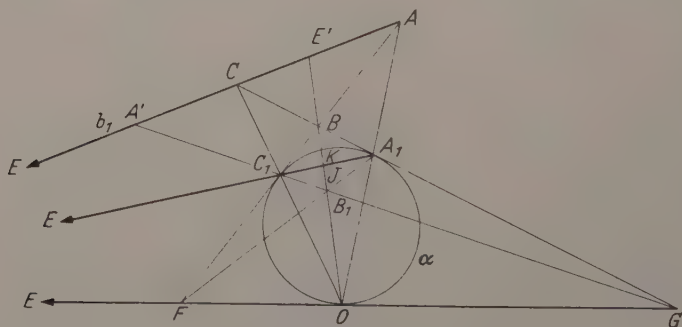


Fig. 2.

nach dem Satze vom vollständigen Viereck, angewendet auf das Viereck A_1OFB in einem Punkt B_1 , der auf der Polaren von A nämlich auf

GC_1 liegt. A_1C_1 schneidet s in einem Punkt E und OC_1 schneidet A_1G in einem Punkt C : nun muß EC in dem vollständigen Viereck A_1OEC durch A gehen. So haben wir dieselbe Figur 2 wie oben erhalten, aber so, daß C_1 der Pol für die Gerade ABF in bezug auf α ist. Zusammenfassend ist

A	der Pol von	B_1C_1G	und	(1)	ist erfüllt
A_1	"	CBG	"	(4)	"
O	"	FEG	"	(7)	"
C_1	"	AFB	"	(6)	"
G	"	OA_1A	"	(10)	"

Daß nun auch die fünf übrigen Gleichungen der obigen Tabelle erfüllt sind, sieht man leicht ein. So ist B der Schnittpunkt von AF und A_1G , also ist die Polare von B die Verbindungslinie der Pole C_1 und A_1 , womit (2) erfüllt ist. Entsprechend ist die Polare von F die Gerade OC_1 , womit (9) erfüllt ist. C ist der Schnittpunkt von OC_1 und A_1G , und darum ist die Polare von C die Gerade FA_1 , womit (3) erfüllt ist. Entsprechend ist die Polare von E die Gerade OB , womit (8) erfüllt ist. B_1 ist der Schnittpunkt von A_1F und OB , also ist seine Polare die Gerade CE , womit auch die letzte Gleichung (5) erfüllt ist.

Dreifachausgeartete Desarguëssche Konfiguration.

Nehmen wir an, daß die Polare von A , nämlich GB_1C_1 die Ordnungskurve α reell schneide, dann wählen wir als Punkt C_1 einen der beiden Schnittpunkte. Seine Polare, nämlich ABF geht dann durch C_1 und auf ihr liegen dann vier Konfigurationspunkte, nämlich $ABFC_1$, so daß wir dann also eine mindestens dreifach ausgeartete Konfiguration erhalten.

Man sieht leicht, daß die Tabellen (1) bis (10) auch nach dem Grenzübergang gelten und daß auch jedes Zentrum der Pol zu seiner Achse ist in bezug auf die Ordnungskurve α . Die Beweise sind fast dieselben wie oben, so daß es sich erübrigt, darauf einzugehen.

In der Figur 2 liegen nun auf den Seiten des Dreiecks BFG je vier Konfigurationspunkte und dual hierzu gehen durch die Pole der Seiten, nämlich A_1, C_1, O vier Konfigurationsgeraden, während alle anderen Punkte und Geraden der Konfiguration sich normal verhalten. Man hat also wirklich eine dreifachausgeartete DESARGUËSSCHE Konfiguration. Die Gerade ACE ist nun nichts anderes als die Harmonikale des Punktes B_1 in bezug auf das Dreieck BFG . Verbindet man nämlich B_1 mit den Ecken des Dreiecks BFG und schneidet die Verbindungslinien mit den bezüglichen Gegenseiten in O, A_1 und C_1 , so hat man zur Konstruktion der Harmonikalen von B_1 zu F, G und O den vierten harmonischen Punkt E zu konstruieren, entsprechend zu

B, G und A_1 den Punkt C und endlich zu B, F und C_1 den Punkt A : diese drei Punkte erhält man aber nach dem Viereckssatz durch A, C_1 , bzw. OC_1 und endlich durch OA_1 . Jetzt hat man auch einen ganz einfachen Beweis dafür, daß die drei Punkte E, C und A in einer Geraden, nämlich der Harmonikalen von B_1 liegen, hierzu genügt ein Hinweis auf (5).

Die Figur 2 enthält die bekannten Spezialfälle für die Sätze des Pascal und Brianchon bezüglich eines der Kurve α einbeschriebenen Dreiecks A_1OC_1 , wobei ACE die Pascalgerade ist und eines umbeschriebenen Dreiecks BFG , für das B_1 der Brianchonpunkt ist. Dabei ist, wie es ja sein muß, die Pascalgerade (Harmonikale) die Polare zum Brianchonpunkt (Harmonikalpunkt) in bezug auf α .

Wir zeigen jetzt, daß es außer den genannten Konfigurationen keine anderen zweifach bzw. dreifach ausgearteten DESARGUESschen Konfigurationen gibt.

Soll in Figur 1 $O EFG$ eine singuläre Gerade sein, so müssen diese vier Punkte vier voneinander verschiedene sein, insbesondere darf keine der Seiten des Dreiecks ABC durch O gehen, ebenso keine der Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$. Keine Ecke der beiden Dreiecke darf auch auf s zu liegen kommen, wie dies unmittelbar klar ist. Eine weitere Entartung außer s kann also nur so eintreten, daß eine Ecke des einen Dreiecks auf eine Seite des anderen fällt. Diese Seite kann als BC genommen werden, was durch passende Bezeichnung stets erreicht werden kann. Die Ecke des anderen Dreiecks, die dann auf BC fällt, kann nicht B_1 und nicht C_1 sein; denn z. B. CC_1 (d. h. BC) muß durch O gehen, während BC durch den von O verschiedenen Punkt G geht. Auf BC kann also nur A_1 liegen, wie dies in Figur 1 angenommen wurde.

Um nun von den zweifachausgearteten zu den dreifachausgearteten zu kommen, hat man das oben Gesagte zu beachten. Bei der Wahl des Punktes A auf OA_1 darf A nicht mit A_1 zusammenfallen, ebenso wenig mit O ; denn sonst hätte die Konfiguration nicht 10 Punkte sondern nur 9. Nun hat man auf B_1C_1G , der Polaren von A , den Punkt C_1 willkürlich zu wählen und seine Polare in bezug auf α als ABF zu nehmen (vgl. (6)). C_1 muß natürlich aus demselben Grunde wie soeben von G verschieden angenommen werden. C_1 darf aber auch nicht auf OA_1 angenommen werden, da sonst E nach O fiel, was oben ausgeschlossen wurde.

Eine weitere Entartung kann also jetzt nur in zwei Fällen eintreten, nämlich wenn C_1 wie in Figur 2 auf der Kurve α angenommen wurde, oder wenn C_1 so gewählt wird, daß B_1 auf die Kurve fällt — nach (5) würde dann die Polare von B_1 nämlich ACE durch B_1 gehen. Dieser Fall ist aber von dem vorigen nicht verschieden, da man ja ebensogut statt C_1 auf der Polaren von A den Punkt B_1 hätte willkürlich wählen können. So folgt der

Satz. *Es gibt keine DESARGUESSchen Konfigurationen, die mehr als dreifach ausgeartet sind.*

Obgleich nun die Figur 2 vielfach in der Literatur vorkommt, so findet man nirgends sie näher untersucht, während sie es ihrer merkwürdigen Eigenschaften halber wohl verdient hätte.

Zunächst möge für die zweifachausgearteten Konfigurationen der Figur 1 erwähnt werden, daß es für sie eine Polarspiegelung gibt, welche die Konfiguration in sich und auch die Ordnungskurve α in sich transformiert. Das Zentrum der Spiegelung ist A und seine Polare GB_1C_1 ist die Spiegelungsachse. Die Punkte A, BC gehen in die Punkte OFE über, während die übrigen vier Punkte in sich übergehen.

Für die dreifachausgearteten DESARGUESSchen Konfigurationen gibt es drei Polarspiegelungen, welche die Konfiguration und α je in sich überführen — wir bezeichnen sie symbolisch mit A, C und E : sie sind bei der involutorischen Perspektive die Zentren und ihre Polaren, nämlich GB_1C_1 , A_1B_1F und BB_1O sind die zugehörigen Achsen. Man hat nun

$$(11) \quad A = \frac{BFG B_1}{FGB B_1}, \quad C = \frac{BFG B_1}{GFB B_1}, \quad E = \frac{BFG B_1}{BGF B_1}.$$

Diese drei Polarspiegelungen vertauschen die Ecken des Dreiecks $EF G$ und führen B_1 in sich über. Die drei Zentren ACE liegen nun so, daß zwei Zentren von dem dritten Zentrum und dessen Polaren harmonisch getrennt werden. So sind z. B. in der Figur 2 $ACEE'$ vier harmonische Punkte. Durch Zusammensetzen der drei Polarspiegelungen (11) erhält man noch folgende Kollineationen, die die Konfiguration und die Ordnungskurve α in sich überführen:

$$(12) \quad AC = CE = EA = \frac{BFG B_1}{FGB B_1},$$

$$(13) \quad CA = AE = EC = \frac{BFG B_1}{GFB B_1}.$$

Dabei bedeutet z. B. AC , daß zuerst die Spiegelung A und dann die Spiegelung C vorgenommen wird.

Die fünf Kollineationen (11), (12) und (13) zusammen mit der identischen bilden nun die Gruppe aller Kollineationen, welche die Konfiguration und die Ordnungskurve in sich überführen. Diese Kollineationen bringen für die Ecken B, F, G alle Permutationen hervor und führen B_1 in sich über. Bedenkt man, daß A, C, E involutorisch sind, also $A^2 = C^2 = E^2 = 1$ ist, so erhält man aus (12) und (13) die Beziehungen

$$(14) \quad A = CEC = ECE = EAC = CAE,$$

$$(15) \quad C = AEA = EAE = ACE = ECA,$$

$$(16) \quad E = ACA = CAC = CEA = AEC.$$

Man hat hier einen merkwürdigen Spezialfall für den allgemeinen Satz, nach dem drei Polarspiegelungen in bezug auf eine Kurve zweiter

Ordnung, deren Zentren auf einer Geraden liegen, durch eine einzige Polarspiegelung ersetzt werden können, deren Zentrum auch auf jener Geraden liegt²⁾. Hier aber liegt darin eine besondere Merkwürdigkeit, daß, wenn man von den drei Spiegelungen ACE irgend drei nacheinander ausübt, immer wieder eine dieser drei Spiegelungen resultiert — dies ist doch der Inhalt der Gleichungen (14) — (16).

Es entsteht nun die Frage, ob auf jeder Geraden in der Ebene der Kurve α drei solche Punkte ACE existieren, ob es auf jeder Geraden viele solcher Tripel von Punkten wie ACE gibt und endlich wie man bei gegebener Geraden die Tripel konstruiert.

Wir zeigen zuerst, daß die gegebene Gerade $b_1 = ACE$ die Kurve nicht reell schneiden darf, oder anders ausgedrückt, daß ihr Pol, nämlich B_1 , ein innerer Punkt der Kurve sein muß, von dem aus also keine reellen Tangenten an die Kurve gehen. Um dies einzusehen, bedenke man das obige Ergebnis, nach dem die Polare von A , nämlich GB_1 , die Gerade b_1 in einem Punkte A' derart schneidet, daß die vier

Punkte $AA'CE$ die harmonische Lage haben. Die beiden konjugierten Punkte AA' werden also durch CE getrennt. Wir können die Bezeichnung uns so gewählt denken, daß C zwischen A und E liegt. Die Polare BB_1 von E schneidet b_1 in dem zu E konjugierten Punkt E' , der zwischen A und C liegt, weil wieder die vier Punkte $EE'AC$ vier harmonische sind. Die Involution konjugierter Punkte AA', EE' auf b_1 ist also eine elliptische, oder b_1 schneidet die Ordnungskurve α nicht reell, oder auch B_1 ist ein innerer Punkt von α .

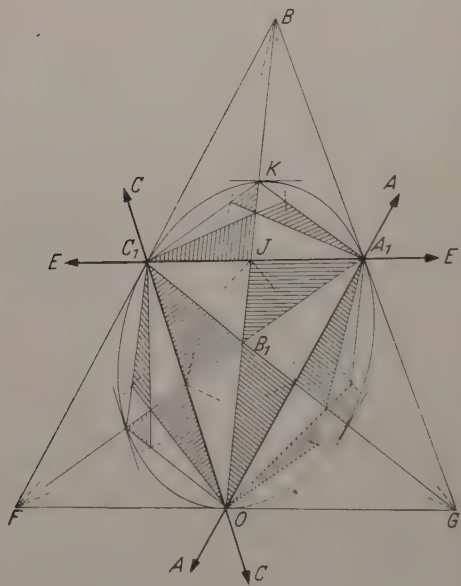


Fig. 3.

Nun üben wir auf die Figur 2 eine Kollineation aus, durch die die Gerade b_1 als Bild die Ferngerade der Bildebene hat; der Bildpunkt von B_1 wird dann als

Pol von b_1 , der Mittelpunkt der Bildkurve der Ordnungskurve, und darum wird aus der Ordnungskurve α durch die Kollineation eine Ellipse, weil nur für eine Ellipse der Mittelpunkt innerer Punkt der Kurve ist. Man erhält so die Figur 3.

²⁾ Hierzu vergleiche man meine Arbeit „Die automorphen Kollineationen einer Kurve zweiter Ordnung“, Jahresber. der Deutsch. Math. Vergg. 1942, S. 13 ff.

den Punkt K . Jetzt ermittle man auf OK den Punkt B derart, daß

$$(17) \quad (OKBB_1) = -3$$

wird. Die von B ausgehenden Tangenten und die Tangente in O bestimmen dann das Dreieck BFG und damit die ganze Konfiguration, insbesondere die Punkte ACE .

Das Ergebnis der Untersuchung ist also, daß es auf der willkürlich angenommenen Geraden b_1 , die nur α nicht reell schneiden darf, unendlichviele Tripel von Punkten ACE gibt: einer von ihnen ist willkürlich wählbar — oben war es der Punkt E , weil eben O willkürlich gewählt wurde. Übrigens findet man direkt aus der Figur 2, daß (17) gilt. Da B der Pol zu A_1C_1 ist, so hat man

$$(18) \quad (OKBJ) = -1.$$

Weiter ergibt sich aus dem vollständigen Viereck $A_1B_1C_1B$

$$(19) \quad (OJBB_1) = -1.$$

Aus (18) und (19) folgt

$$(20) \quad (OBKJ) = 2,$$

$$(21) \quad (OBJB_1) = 2$$

und nun durch Multiplikation

$$(OBKJ) \cdot (OBJB_1) = (OBKB_1) = 4$$

und hieraus

$$(OKBB_2) = 1 - 4 = -3,$$

also die Gleichung (17).

Die Tripel von Punkten wie ACE auf einer die Kurve zweiter Ordnung α nicht schneidenden Geraden b_1 sind nun invariant gegenüber jeder Kollineation, die man auf die Ebene von α ausübt; denn an jedem Tripel hängt ja sozusagen eine dreifachausgeartete DESARGUESsche Konfiguration. Während also das Doppelverhältnis von vier Punkten auf einer Geraden invariant ist, so sind es auch die Tripel von Punkten auf einer einen Kegelschnitt nicht reell schneidenden Geraden; sie gehen bei einer Kollineation in die Tripel der verwandelten Geraden in bezug auf den verwandelten Kegelschnitt über. Dies scheint mir ein recht merkwürdiges Ergebnis zu sein.

Die Lage der Tripel läßt sich am besten beschreiben, wenn man sich der Sprache der hyperbolischen Geometrie bedient.

Projiziert man die drei Punkte ACE der Figur 4 durch drei Strahlen aus B_1 , so erhält man bei passender Wahl der positiven Richtung für jeden Strahl das Ergebnis, daß jene drei Strahlen gleiche Winkel $= 2\pi:3$ miteinander bilden — im Euklidischen Sinne genommen. Nimmt man nun den Kreis als Maßkegelschnitt für eine hyperbolische Maßbestimmung, so stimmen für den Mittelpunkt B_1 des Kreises die hyperbolische und Euklidische Winkelbestimmung nach dem Satze von LAGUERRE überein. Geht man durch die Kollineation

von der Figur 4 zurück zur Figur 2 und nimmt man den Kegelschnitt α der Figur 2 als Maßkegelschnitt einer hyperbolischen Maßbestimmung, so kann man sagen, daß jedes Tripel von (idealen) Punkten auf b_1 aus dem Punkt B_1 durch drei Strahlen projiziert wird, die gleiche hyperbolische Winkel $= 2\pi:3$ miteinander bilden. Da weiter in der Figur 4 die Richtung des Strahles B_1O willkürlich war, oder anders ausgedrückt, da die Tripel ACE auf der Ferngeraden der Euklidischen Ebene durch Euklidische Drehungen um B_1 ineinander übergehen, so kann man für die Figur 2 sagen: Die Tripel von Punkten ACE gehen durch hyperbolische Drehungen mit dem Mittelpunkt B_1 ineinander über. Man kann sich auch so ausdrücken: Die DESARGUES'schen Konfigurationen mit demselben Punkt B_1 gehen durch hyperbolische Drehungen um den Punkt B_1 ineinander über.

Da die Polare von A der Figur 2 die Gerade GC_1 ist, so ist B_1C_1 eine Höhe des (uneigentlichen, asymptotischen) Dreiecks OA_1C_1 , d. h. B_1 ist für das asymptotische Dreieck der Höhenschnittpunkt, und die drei Höhen bilden miteinander denselben hyperbolischen Winkel $= 2\pi:3$. Da weiter nach der Figur 4

$$(22) \quad (OKJB_1) = 3$$

ist, so ist die hyperbolische Länge von JB_1 gegeben durch

$$(23) \quad JB_1 = \frac{r}{2} \lg 3.$$

Der Punkt B_1 der Figur 2 ist also für das Dreieck OA_1C_1 der Mittelpunkt des hyperbolischen Innkreises.

Da die drei Punkte OA_1C_1 drei beliebige Punkte des Maßkegelschnitts sind, so gilt das Gesagte für jedes asymptotische Dreieck. Aus (23) ergibt sich noch, daß für alle asymptotischen Dreiecke der Innkreisradius konstant ist. Die muß ja auch sein, da jedes asymptotische Dreieck sich durch eine hyperbolische Bewegung in ein beliebiges anderes überführen läßt.

Die Ebene von Poincaré.

Besonders bemerkenswert werden die Verhältnisse, wenn die hyperbolische Geometrie in der Ebene von POINCARÉ gedeutet wird, in der die hyperbolischen Winkel mit den Euklidischen übereinstimmen. Aus der Figur 4 entspringt dann die Figur 5. Das Dreieck OA_1C_1 der Figur 4 ist nun zu dem Kreisbogendreieck OA_1C_1 der Figur 5 geworden. Die drei Höhen dieses Dreiecks schneiden sich in B_1 unter dem Winkel $2\pi:3$, und der Innkreis des Dreiecks ist ein Euklidischer Kreis, der in B_1 seinen hyperbolischen Mittelpunkt hat und die Seiten des Dreiecks in den Fußpunkten J, L, M der Höhen berührt. Hier wird man nun sofort an die Modulfigur erinnert: In der Tat ist z. B. das Dreieck MB_1O ein Dreieck mit den Winkeln $\pi:2, \pi:3, 0$. Derartige

Dreiecke spielen ja in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen eine hervorragende Rolle³⁾. Spiegelt man das Dreieck OJA_1 an OJ

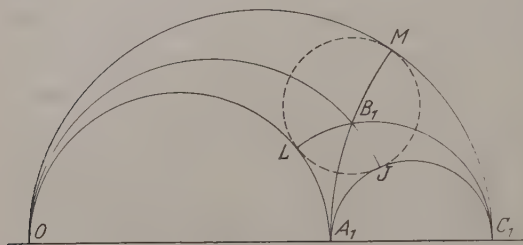


Fig. 5.

als Kreis der Inversion, so geht es, wie man unmittelbar sieht, in das Dreieck OJC_1 , und darum geht durch dieselbe Spiegelung das Dreieck OLB_1 in das Dreieck OMB_1 über. Durch Spiegelung an den anderen Höhen des asymptotischen Dreiecks findet man aufs Neue, daß die drei Höhen

gleiche Winkel miteinander machen, und daß die unteren Höhenabschnitte einander gleich sind. Spiegelt man die Figur auch an den Seiten des asymptotischen Dreiecks und setzt diesen Spiegelungsprozeß fort, so erhält man eben die Modulfigur. Auch die Länge von $b = JB_1$ findet man leicht wieder. Bezeichnet man den Winkel JB_1C_1 mit γ , wo also $\gamma = \pi:3$ ist, so ist γ in dem hyperbolischen Dreieck JB_1C_1 der Parallelitätswinkel, und es besteht darum die bekannte Beziehung

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{e^{\frac{b}{r}} - e^{-\frac{b}{r}}}{2},$$

aus der sich wie in (23) der Wert

$$b = JB_1 = \frac{r}{2} \lg 3$$

ergibt.

Man kann nun auch die Modulfigur für die Figur 3 herstellen, wenn man bedenkt, daß Spiegelung durch Inversion in der Ebene von POINCARÉ in der Ebene des Maßkegelschnitts der Figur 3 das ist, was ich Polarspiegelung nenne. Spiegelt man z. B. polar an der Seite A_1C_1 des asymptotischen Dreiecks OA_1C_1 , so erhält man das Dreieck KA_1C_1 , wobei man für dieses Dreieck die Höhenfußpunkte aus denen des Dreiecks OA_1C_1 dadurch erhielt, daß man sie mit B verband und mit KC_1 bzw. KA_1 schnitt. So erhält man die Figur 62, Seite 240 bei KLEIN-FRICKE, auf die KLEIN in der Fußnote zu Seite 242 so großen Wert legt. Es ist merkwürdig, wie so verschiedene Ausgangspunkte wie der von KLEIN und der von mir zu derselben Figur führen — ja bei KLEIN findet sich sogar das Dreieck BFG in unserer Figur 3. Freilich ist die von KLEIN befolgte Methode zur Herstellung der Figur reichlich umständlich. Was dort in ein paar Seiten abgewandelt wird, kann, wie soeben gezeigt wurde, in wenigen Zeilen erledigt werden.

³⁾ Man vergleiche z. B. „KLEIN-FRICKE, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen“, 1890, Bd. I, S. 113.

Über halbgeordnete Gruppen.

Von

Paul Lorenzen in Bonn.

I. TEIL.

Die vorliegenden Untersuchungen über halbgeordnete Gruppen sind aus einer Analyse gewisser Ergebnisse und Beweismethoden der Arithmetik der kommutativen Integritätsbereiche¹⁾ entstanden. Wie sich gezeigt hat, sind viele Sätze dieser Arithmetik ohne wesentliche Änderungen in den Beweismethoden auch für kommutative Halbgruppen gültig²⁾.

Im Folgenden soll nun nicht nur nachgewiesen werden, daß für die Gültigkeit dieser arithmetischen Sätze auch die Kommutativität der Multiplikation entbehrlich ist — unser Interesse ist vielmehr hauptsächlich darauf gerichtet, den in Frage stehenden Komplex dadurch begrifflich einfacher und durchsichtiger zu machen, daß wir ihn von Anfang an von einem halbordnungstheoretischen Standpunkt aus entwickeln. Nur dadurch gelingt es uns nämlich, an den entscheidenden Stellen, an denen die kommutativen Methoden versagen, zum Ziel zu gelangen. Auf diese Weise erhält man dann, auch für den kommutativen Spezialfall z. T. eine sehr starke Vereinfachung der Beweise, z. T. auch neue Einsichten, wie ich in der folgenden Darstellung des Gedankenganges der Arbeit nachweisen will.

Die Ergebnisse der Arithmetik der kommutativen Integritätsbereiche, die wir als Spezialfälle allgemeiner Sätze über halbgeordnete Gruppen nachweisen wollen, schließen sich an die folgende Fragestellung an:

Wann und wie ist ein Integritätsbereich als Durchschnitt von Bewertungsringen darstellbar?

Wir müssen zunächst überlegen, wie diese arithmetische Fragestellung für beliebige Gruppen zu formulieren ist, so daß sie als ein Spezialfall in der allgemeinen Formulierung enthalten ist. Dazu stellen wir die folgende Betrachtung an.

Ein Integritätsbereich I definiert in der multiplikativen Gruppe K^* seines Quotientenkörpers K eine Teilbarkeitsrelation. Für jedes

¹⁾ Vgl. hierzu vor allem den Idealbericht (Erg. d. Math. Bd. 4, 1935) und die „Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche“ in der Math. Z. von W. KRULL.

²⁾ Vgl. P. LORENZEN, Math. Z. 45, 1939.

$a, b \in K^*$ gilt: a teilt b (bezügl. I) genau dann, wenn $a^{-1}b \in I$ gilt. Diese Teilbarkeitsrelation ist reflexiv und transitiv, d. h. es gilt — wenn wir $a \leq b$ schreiben für a teilt b — für jedes $a, b, c \in K^*$

$$1) \quad a \leq a$$

$$2) \quad a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c.$$

Jede reflexive und transitive Relation in einer beliebigen Menge nennen wir eine Halbordnung. Die Gruppe K^* wird also durch den Integritätsbereich I zu einer halbgeordneten Menge. Diese Halbordnung von K^* bestimmt umgekehrt wieder eindeutig den Integritätsbereich I .

Die Halbordnung von K^* ist ferner bezügl. der Multiplikation monoton, d. h. es gilt für jedes $a, b, x, y \in K^*$

$$3) \quad a \leq b, x \leq y \Rightarrow ax \leq by.$$

Wir nennen jede Gruppe, in der eine Relation $\leq$ definiert ist, die 1)–3) genügt, eine halbgeordnete Gruppe. K^* ist eine halbgeordnete Gruppe.

Jeder Bewertungsring B von K liefert durch seine Teilbarkeitsrelation nicht nur eine Halbordnung von K , sondern sogar eine Ordnung: für jedes $a, b \in K^*$ gilt nämlich stets a teilt b (bez. B) oder b teilt a (bez. B).

Umgekehrt bestimmt aber nicht jede Ordnung von K^* eine Bewertung von K , sondern nur diejenigen Ordnungen $\leq$ von K^* , für die stets gilt:

$$4) \quad c \leq a, c \leq b \Rightarrow c \leq a + b.$$

Wie man der Theorie der kommutativen Halbgruppen entnehmen kann, sind die Ordnungen, die einen Bewertungsring B bestimmen, der I umfaßt, dadurch gekennzeichnet, daß sie zugleich eine Ordnung der Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots$ von I ermöglichen, so daß stets gilt:

$$5) \quad \mathfrak{c} \leq \mathfrak{a}, \mathfrak{c} \leq \mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{c} \leq \mathfrak{a} + \mathfrak{b}.$$

Genauer gesagt: die Teilbarkeitsrelationen der Bewertungsoberringe von I sind die Ordnungen von K^* , die durch die Ordnungen des Idealsystems von I induziert werden, die 5) erfüllen. Die hier auftretenden Ordnungen des Idealsystems nennen wir die zulässigen Ordnungen.

Wir definieren in § 4 Idealsysteme für beliebige halbgeordnete Mengen und insbesondere für halbgeordnete Gruppen. Wir definieren auch für diesen allgemeinen Fall die zulässigen Ordnungen eines Idealsystems und dann weiter:

Eine Ordnung einer halbgeordneten Gruppe G , zu der ein Idealsystem H gegeben ist, heißt zulässig (bezgl. H), wenn sie durch eine zulässige Ordnung von H in G induziert wird. Die Teilbarkeitsrelationen der Bewertungsoberringe von I sind dann also genau die (bezgl. des DEDEKINDSchen Idealsystems) zulässigen Ordnungen von K^* .

Mit Hilfe dieser Definitionen ist jetzt ohne weiteres zu sehen, daß die Fragestellung der Arithmetik der kommutativen Integritätsbereiche, von der wir ausgingen, in der folgenden Fragestellung für halbgeordnete Gruppen als Spezialfall enthalten ist.

Gegeben sei eine beliebige halbgeordnete Gruppe G und ein beliebiges Idealsystem H von G . Wann und wie ist die Halbordnung von G als Konjunktion zulässiger Ordnungen von G darstellbar? (Dabei nennen wir eine Halbordnung $\leq$ die Konjunktion der Ordnungen $\leq_i$, wenn für jedes a, b gilt:

$$a \leq b \iff (\text{für jedes } \tau: a \leq_\tau b).$$

Damit haben wir die Ausgangsfragestellung unserer Untersuchung erhalten. Abgesehen von § 2 ist sie der ausschließliche Gegenstand des I. Teils dieser Arbeit. (Die Ergebnisse des II. Teils werden in dessen Einleitung S. 519 zusammengefaßt.)

In § 1 werden die halbordnungstheoretischen Grundbegriffe definiert, von denen ich vor allem den Begriff des Halbverbandes hervorheben möchte. Wie sich später in § 4 herausstellt, ist es dieser Begriff, der eine denkbar einfache rein halbordnungstheoretische Definition des Idealsystems ermöglicht.

Überprüft man jetzt die kommutativen Beweismethoden, um zu sehen, welche Ergebnisse der Arithmetik auch noch für halbgeordnete Gruppen gültig bleiben, so wird man zwar viele Einzelheiten finden, die sich sofort auf den allgemeinen Fall übertragen — von den entscheidenden Sätzen bleibt jedoch nur ein einziger etwa genau so wie im Kommutativen beweisbar. Dieser Satz ist der folgende: Jeder Hauptidealring ist als Durchschnitt von Bewertungsringen darstellbar.

Wodurch ist ein Hauptidealring halbordnungstheoretisch gekennzeichnet? Die Teilbarkeitsrelation eines Hauptidealringes macht die multiplikative Gruppe seines Quotientenkörpers nicht nur zu einer halbgeordneten Gruppe, sondern auch zu einem Verband. Solche halbgeordneten Gruppen, die gleichzeitig einen Verband bilden, nennen wir Verbandsgruppen. Wir stehen dann vor der folgenden Frage:

Wann ist die Halbordnung einer Verbandsgruppe als Konjunktion zulässiger Ordnungen darstellbar?

(Ein Idealsystem braucht hier nicht gegeben zu sein, da eine Verbandsgruppe ihr eigenes Idealsystem ist.)

Ehe in § 3 diese Frage beantwortet wird, entwickeln wir in § 2 die einfacheren Eigenschaften der Verbandsgruppen. Es wird zunächst die verbandstheoretische Distributivität bewiesen — ein Ergebnis, das im kommutativen Fall schon auf DEDEKIND zurückgeht. Weiter wird ein Verfeinerungssatz bewiesen, der einfacher ist, als der nichtkommutative Verfeinerungssatz von HENCKE. Im Kommutativen entsteht aus unserem Verfeinerungssatz der ARTIN-SCHREIERSche Satz, über den er nur in der bewiesenen Eindeutigkeit der Verfeinerung hinausgeht.

Das Ziel von § 3 ist der Satz:

Die Halbordnung einer Verbandsgruppe G ist genau dann als Konjunktion zulässiger Ordnungen von G darstellbar, wenn G regulär ist. (Die einfache Bedingung der „Regularität“, die hier auftritt, ist im Kommutativen stets erfüllt.)

Der Beweis des Satzes, der im Kommutativen mit Hilfe der t -Primideale geführt wird, benutzt an deren Stelle prime vollständige invariante Unterhalbgruppen — das ist aber kein wesentlicher Unterschied. So wie im Kommutativen die zulässigen Ordnungen eindeutig den t -Primidealen zugeordnet sind, sind sie hier den primen vollständigen invarianten Unterhalbgruppen zugeordnet.

Das Ergebnis von § 3 stellt schon eine wichtige Antwort für unsere Ausgangsfragestellung dar, denn aus ihm ergibt sich sofort, daß die Halbordnung einer halbgeordneten Gruppe G genau dann als Konjunktion von Ordnungen von G darstellbar ist, wenn sich G in eine reguläre Verbandsgruppe einbetten läßt.

Zur Ausnutzung dieser Konsequenz von § 3 untersuchen wir in § 4 die weitere Frage: Wie läßt sich eine halbgeordnete Gruppe in eine Verbandsgruppe einbetten — vorausgesetzt, daß eine solche Einbettung möglich ist?

Die kommutativen Methoden reichen hier zu einer Antwort nicht mehr aus. In der Arithmetik geschieht diese Einbettung nämlich mit Hilfe eines arithmetisch brauchbaren Idealsystems und des dadurch bestimmten KRONECKERSchen Funktionalringes. An die Stelle des Funktionalringes tritt in der Theorie der kommutativen Halbgruppen eine formal gebildete Quotientengruppe aus Idealbrüchen. Auch diese Methode jedoch kann im Nichtkommutativen ersichtlich nicht mehr benutzt werden.

Wir erhalten die Antwort auf unsere Frage durch eine genaue halbordnungstheoretische Analyse des Idealbegriffs. Im Kommutativen werden die Idealsysteme stets als Systeme von gewissen Untermengen eingeführt. Beseitigt man aber diese mengentheoretische Einkleidung, so läßt sich der Idealbegriff ganz einfach definieren: ein Idealsystem einer halbgeordneten Menge ist nichts anderes als eine Einbettung in einen Halbverband. (Ich bemerke ausdrücklich, daß man hier statt „Halbverband“ nicht „Verband“ setzen darf.)

Wir zeigen zunächst, daß unser Begriff des Idealsystems für kommutative Halbgruppen mit dem dort üblichen Begriff gleichwertig ist. Der halbordnungstheoretische Idealbegriff führt uns dann sofort weiter zu folgendem Ergebnis:

Läßt sich eine halbgeordnete Gruppe G in eine Verbandsgruppe einbetten, so enthält diese Verbandsgruppe 1) ein Idealsystem H von G , das eine Halbgruppe bildet, und 2) ein Idealsystem V von H , das selbst schon eine Verbandsgruppe bildet.

Eine Einbettung einer halbgeordneten Gruppe G in eine Verbandsgruppe läßt sich also — wenn sie überhaupt möglich ist — stets in zwei Schritten vollziehen: es ist 1) ein Idealsystem H von G zu bilden und 2) ein Idealsystem V von H .

Über diese Antwort auf unsere Frage hinausgehend, wird dann bewiesen, daß das Idealsystem I' von H in jedem Falle von vornherein bestimmt ist: es ist die Verallgemeinerung des ARTINSCHEN r -Idealsystems aufs Nichtkommutative. Dieses Ergebnis ist auch für die Arithmetik neu:

Ist H ein arithmetisch brauchbares Idealsystem eines Integritätsbereiches I , so bilden die r -Ideale von H eine Verbandsgruppe. (Auf Grund der kommutativen Ergebnisse ist diese Verbandsgruppe isomorph zur Quotientengruppe von H . Mir scheint jedoch, auch im kommutativen Fall die rein halbordnungstheoretische Konstruktion den Vorzug zu verdienen.)

In § 5 wird zunächst der Begriff der zulässigen Ordnung einer halbgeordneten Gruppe G , zu der ein Idealsystem H gegeben ist, definiert. Wir haben diesen Begriff nur hier vorweggenommen, um den Gedankengang klarer hervortreten zu lassen. Im Text unterscheiden wir verschiedene Idealsysteme durch einen kleinen lateinischen Kennbuchstaben, wir sprechen z. B. von s -Idealen und v -Idealen. Als Variable für diesen Kennbuchstaben benutzen wir r . Um die Darstellung nicht zu belasten, unterdrücken wir hier diesen Kennbuchstaben.

Die Ergebnisse von § 3 und 4 liefern den Satz:

Ist die Halbordnung von G als Konjunktion zulässiger Ordnungen von G darstellbar, so gibt es ein Idealsystem H' von G , dessen v -Ideale eine reguläre Verbandsgruppe bilden. Die zulässigen Ordnungen von G sind eineindeutig den primen vollständigen invarianten Unterhalbgruppen zugeordnet. Diese Zuordnung ist ein Isomorphismus bezgl. der Bildung von Konjunktion bzw. Durchschnitt.

Die hier auftretenden Idealsysteme H' , die in der Arithmetik „arithmetisch brauchbar“ heißen, nennen wir auch im allgemeinen Fall „brauchbar“.

Der arithmetische Satz, daß der Übergang von H zu H' eine Strichoperation³⁾ darstellt, erhält im allgemeinen Falle seinen einfacheren Ausdruck durch:

Jedes brauchbare Idealsystem H' ist homomorph zu H .

Wie in der Arithmetik ergibt sich dann weiter, daß unter den brauchbaren Idealsystemen eines ausgezeichnet ist, zu dem alle anderen homomorph sind⁴⁾. Dieses ausgezeichnete Idealsystem ist in der Arith-

³⁾ Vgl. 1).

⁴⁾ Diese Definition ist eine begriffliche Fassung der im Kommutativen üblichen Definition.

metik das KRULLsche b -Idealsystem, das bekanntlich mit dem PRÜFFERSchen a -Idealsystem identisch ist.

Die Kenntnis des ausgezeichneten brauchbaren Idealsystems vorausgesetzt, ergeben sich also alle brauchbaren Idealsysteme als homomorphe Bilder — nach der Untersuchung von § 3 damit aber als eindeutig zugeordnet gewissen regulären vollständigen invarianten Unterhalbgruppen, die in Satz 22 angegeben werden. Dieses Ergebnis ist für die Arithmetik nicht neu, nur der Beweis ist vereinfacht durch Benutzung des Homomorphiebegriffes.

Zur Beantwortung unserer Ausgangsfragestellung für halbgeordnete Gruppen bleibt uns jetzt vor allem folgende Frage:

Wie läßt sich das ausgezeichnete brauchbare Idealsystem einer halbgeordneten Gruppe G konstruieren — vorausgesetzt, daß es überhaupt existiert.

Wir setzen also voraus, daß die Halbordnung von G als Konjunktion zulässiger Ordnungen von G darstellbar ist. Bei der Konstruktion des ausgezeichneten brauchbaren Idealsystems wollen wir aber die Kenntnis dieser Ordnungen nicht voraussetzen, weil wir gerade mit Hilfe des Idealsystems die zulässigen Ordnungen bestimmen wollen.

Diese Konstruktion wird in der Arithmetik geliefert durch den PRÜFFERSchen Begriff der Ganzabhängigkeit von einem Ideal a des gegebenen Integritätsbereiches I .

Ein Element a des Quotientenkörpers K heißt ganzabhängig von a , wenn a einer Gleichung

$$1) \quad a^n + a_1 a^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

mit $a_i \in a'$ genügt.

In der Theorie der kommutativen Halbgruppen tritt an die Stelle von 1) die Bedingung, daß es ein endliches Ideal c geben soll, so daß

$$2) \quad ac \leq ac$$

gilt. Auch diese Bedingung 2) läßt sich jedoch nicht auf den nicht-kommutativen Fall ausdehnen.

Um den Grundgedanken unserer neuen Konstruktion, die wir statt 1) oder 2) verwenden, deutlich zu machen, führe ich sie hier für den arithmetischen Spezialfall durch. § 6 des Textes bringt die Durchführung für beliebige halbgeordnete Gruppen.

I sei ein beliebiger Integritätsbereich, a ein (endliches oder unendliches) Ideal von I , a ein Element des Quotientenkörpers K . Wir fragen uns, wann für jeden Bewertungsoberring B von I gilt: $a \in aB$. Für beliebiges $z \in K^*$ und jeden Bewertungsoberring B von I gilt stets

$$z \in B \quad \text{oder} \quad z^{-1} \in B.$$

Gilt also $a \in aI[z]$ und $a \in aI[z^{-1}]$, so gilt stets $a \in aB$. Ebenso folgt:

Gibt es Elemente $z_1, \dots, z_n \in K^*$, für die

$$3) \quad a \in \alpha I[z_1^{+1}, \dots, z_n^{+1}]$$

für jede der 2^n Vorzeichenkombinationen gilt, so gilt für jeden Bewertungsoberring B von I :

$$a \in \alpha B.$$

Diese Bedingung 3) ist auch notwendig. Ist nämlich 3) für kein $z_1, \dots, z_n$ erfüllt, so zeigt ein einfacher Wohlordnungsschluß, daß es einen maximalen Oberring $\bar{I}$ von I gibt, mit der Eigenschaft, daß für jedes $z_1, \dots, z_n \in K^*$

$$a \notin \alpha \bar{I}[z_1^{+1}, \dots, z_n^{+1}]$$

für mindestens eine Vorzeichenkombination gilt ^{4a)}. Insbesondere gilt also $a \notin \alpha \bar{I}$. Wäre dieses $\bar{I}$ kein Bewertungsring, so gäbe es ein $z \in K^*$ mit $z \in \bar{I}$ und $z^{-1} \notin \bar{I}$, also gäbe es Elemente $x_1, \dots, x_m$ und $y_1, \dots, y_n$ mit

$$a \in \alpha \bar{I}[z][x_1^{+1}, \dots, x_m^{+1}]$$

$$a \in \alpha \bar{I}[z^{-1}][y_1^{+1}, \dots, y_n^{+1}]$$

für jede Vorzeichenkombination. Hieraus würde aber

$$a \in \alpha \bar{I}[z^{+1}, x_1^{+1}, \dots, x_m^{+1}, y_1^{+1}, \dots, y_n^{+1}]$$

folgen, d. h. ein Widerspruch. Also ist $\bar{I}$ Bewertungsring.

Damit ist das folgende neue Ergebnis gewonnen:

Es gilt genau dann $a \in \alpha B$ für jeden Bewertungsoberring B von I , wenn es Elemente $z_1, \dots, z_n \in K^*$ gibt, für die

$$a \in \alpha I[z_1^{+1}, \dots, z_n^{+1}]$$

für jede Vorzeichenkombination gilt.

Der Beweis ist so einfach, daß er sich ohne weiteres in beliebigen halbgeordneten Gruppen durchführen läßt und hier sowohl eine Konstruktion des ausgezeichneten brauchbaren Idealsystems liefert (vorausgesetzt, daß es existiert), als auch die folgende Frage beantwortet:

Wann ist die Halbordnung einer halbgeordneten Gruppe G als Konjunktion zulässiger Ordnungen von G darstellbar?

Zum Schluß zeigen wir, daß sich diese Ergebnisse mit den bekannten Ergebnissen im Kommutativen in Übereinstimmung befinden. Dadurch erhält man für die Arithmetik einen neuen, sehr vereinfachten Beweis für die Identität des a - und b -Idealsystems. Ferner erhält man für den grundlegenden Begriff der Ganzabhängigkeit eines Elementes a von einem Integritätsbereich I einen neuen gleichwertigen Ausdruck:

a ist genau dann ganz abhängig von I , wenn es Elemente $z_1, \dots, z_n$ des Quotientenkörpers gibt, die $a \in I[z_1^{+1}, \dots, z_n^{+1}]$ für jede Vorzeichenkombination erfüllen.

^{4a)} $\bar{\epsilon}$ steht für : nicht ϵ .

§ 1.

Halbordnungen.

Wir betrachten zunächst Halbordnungen in beliebigen Mengen. Ist M eine Menge, so nennen wir jede reflexive und transitive Relation R in M eine Halbordnung. Es soll also für jedes $a \in M$ gelten

$$a R a.$$

Ferner soll für jedes $a, b, c \in M$ gelten

$$a R b, b R c \Rightarrow a R c^5).$$

Wir schreiben $a \leq b$ für $a R b$.

Für jede Halbordnung benutzen wir außerdem zur Abkürzung:

$a \geq b$, wenn $b \leq a$ gilt,

$a \equiv b$, wenn $a \leq b$ und $a \geq b$ gilt,

$a < b$, wenn $a \leq b$, aber nicht $a \geq b$ gilt,

$a > b$, wenn $b < a$ gilt.

Wir fordern für Halbordnungen nicht, daß

$$a \equiv b \Rightarrow a = b$$

gelten soll, wie es für die teilweisen Ordnungen meist geschieht. Das ist jedoch kein wesentlicher Unterschied.

Eine Halbordnung heißt Ordnung, wenn für jedes $a, b \in M$ stets $a \leq b$ oder $b \leq a$ gilt.

Eine Menge, in der eine Halbordnung bzw. eine Ordnung definiert ist, heißt eine halbgeordnete bzw. eine geordnete Menge (bzgl. $\leq$). Wir brauchen außerdem noch den Begriff des Halbverbandes und des Verbandes.

Eine halbgeordnete Menge M (bzgl. $\leq$) heißt Halbverband (bzgl. $\leq$), wenn für jedes $a, b \in M$ ein $c \in M$ existiert, das die Bedingungen

$$\begin{aligned} c &\leq a \\ c &\leq b \end{aligned}$$

für jedes $x \in M$: $x \leq a, x \leq b \Rightarrow x \leq c$

erfüllt. c wird als größter gemeinsamer Teiler (g. g. T.) von a und b bezeichnet:

$$c \equiv a \wedge b^6).$$

⁵⁾ $\dots, \dots \Rightarrow \dots$ bedeutet, daß die Konjunktion der Aussagen links von $\Rightarrow$ die Aussage rechts von $\Rightarrow$ impliziert.

$\dots \langle \Rightarrow \dots$ bedeutet die Äquivalenz zweier Aussagen.

⁶⁾ Der g. g. T. ist zwar nicht eindeutig bestimmt, aber für zwei Elemente c_1 und c_2 , die die obigen Bedingungen erfüllen, gilt stets $c_1 \equiv c_2$.

Ein Halbverband M (bzgl. $\leq$) heißt Verband (bzgl. $\leq$), wenn M auch ein Halbverband bzgl. $\geq$ ist. Dann existiert also für jedes $a, b \in M$ stets ein kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches (k. g. V) $c \equiv a \vee b$, das die Bedingungen

$$a \leq c$$

$$b \leq c$$

für jedes $x \in M$: $a \leq x, b \leq x \Rightarrow c \leq x$ erfüllt.

Der Gegenstand dieser Arbeit sind die Halbordnungen von Gruppen. Wir müssen dabei jedoch außer den Gruppen auch allgemeinere multiplikative Bereiche, Halbgruppen betrachten.

Unter einer Halbgruppe H verstehen wir eine Menge, in der eine Verknüpfung definiert ist, die jedem $a, b \in H$ genau ein Element, das Produkt ab von a und b , zuordnet, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

für jedes $a, b, c \in H$:

$$a(bc) = (ab)c,$$

es existiert ein $e \in H$, so daß für jedes $a \in H$ gilt

$$ae = ea = a^7).$$

Wir nennen nun eine Halbgruppe H halbgeordnet, wenn H eine halbgeordnete Menge ist und für jedes $a, b, x, y \in H$ gilt

$$a \leq b \Rightarrow xay \leq xby.$$

Diese Bedingung ist — unter Voraussetzung von Reflexivität und Transitivität — gleichwertig mit der „Monotonie“

$$a \leq b, x \leq y \Rightarrow ax \leq by.$$

Die Halbordnungen einer Gruppe sind schon allein durch Reflexivität und Monotonie gekennzeichnet. In diesem Falle ist nämlich die Transitivität sofort ableitbar, da in einer Gruppe $a \leq b$ genau dann gilt, wenn $ab^{-1} \leq 1$ gilt⁸⁾.

⁷⁾ Für zwei Elemente e_1 und e_2 , die die Bedingung erfüllen, gilt $e_1 = e_1 e_2 = e_2$. Also gibt es genau ein Element e , das der Bedingung genügt. Wir nennen es das Eins-Element 1.

⁸⁾ Unter Voraussetzung von Reflexivität und Monotonie gilt

$$a \leq b, b^{-1} \leq b^{-1} \Rightarrow ab^{-1} \leq 1,$$

$$ab^{-1} \leq 1, b \leq b \Rightarrow a \leq b,$$

$$a \leq b \Leftrightarrow ab^{-1} \leq 1.$$

Wegen

$$ab^{-1} \leq 1, bc^{-1} \leq 1 \Rightarrow ac^{-1} = (ab^{-1})(bc^{-1}) \leq 1$$

gilt daher

$$a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c.$$

Wir bemerken noch, daß in einer halbgeordneten Gruppe genau dann $a \leq b$ gilt, wenn $a^{-1} \geq b^{-1}$ gilt.

Die halbgeordneten Gruppen verallgemeinern den Begriff des Körpers, in dem — etwa durch Auszeichnung eines Integritätsbereiches — eine Teilbarkeit definiert ist.

Wir gebrauchen daher auch für halbgeordnete Gruppen die Bezeichnungen der Teilbarkeitstheorie.

Gilt $a \leq b$ in einer halbgeordneten Gruppe, so heißt a ein Teiler von b und b ein Vielfaches von a .

Die Elemente a mit $a \geq 1$ heißen ganz, die Elemente a mit $a \equiv 1$ bzw. $a > 1$ heißen Einheiten bzw. Nichteinheiten. Die Einheiten bilden einen Normalteiler E von G . Man kann stets von der halbgeordneten Gruppe G zur Faktorgruppe G/E übergehen. Dieser Übergang ist jedoch unwesentlich.

Die ganzen Elemente einer halbgeordneten Gruppe G bilden eine invariante Unterhalbgruppe $\mathfrak{g}$ von G . Es gilt nämlich

$$1 \geq 1$$

für jedes $a, b \in G$:

$$a \geq 1, b \geq 1 \Rightarrow ab \geq 1,$$

für jedes $a, x \in G$:

$$a \geq 1 \Rightarrow xax^{-1} \geq 1.$$

Dies bedeutet für die Menge $\mathfrak{g}$ der ganzen Elemente

$$1 \in \mathfrak{g},$$

für jedes $a, b \in G$:

$$a \in \mathfrak{g}, b \in \mathfrak{g} \Rightarrow ab \in \mathfrak{g},$$

für jedes $a, x \in G$:

$$a \in \mathfrak{g} \Rightarrow xax^{-1} \in \mathfrak{g}.$$

Wir nennen die invariante Unterhalbgruppe der ganzen Elemente kurz die (zu $\leq$) zugehörige Halbgruppe.

Satz 1. Die Halbordnungen einer Gruppe G entsprechen eindeutig den invarianten Unterhalbgruppen von G .

Beweis. Wir haben noch zu zeigen, daß jede invariante Unterhalbgruppe $\mathfrak{g}$ einer Gruppe G eine Halbordnung von G definiert. Dazu setze man für jedes $a, b \in G$:

$$a \leq b,$$

wenn $a^{-1}b \in \mathfrak{g}$ gilt. Nun gilt für jedes $a \in G$:

$$a^{-1}a \in \mathfrak{g}, \text{ also } a \leq a.$$

Ferner gilt für jedes $a, b, x, y \in G$

$$a^{-1}b \in \mathfrak{g}, x^{-1}y \in \mathfrak{g} \Rightarrow (ax)^{-1}by \in \mathfrak{g},$$

dann aus $a^{-1}b \in \mathfrak{g}$ folgt $x^{-1}a^{-1}bx \in \mathfrak{g}$ und dann aus $x^{-1}y \in \mathfrak{g}$ auch

$$(ax)^{-1}by = x^{-1}a^{-1}bxx^{-1}y \in \mathfrak{g}.$$

Also gilt

$$a \leq b, x \leq y \Rightarrow ax \leq by.$$

Da jetzt $a \geq 1$ genau dann gilt, wenn $a \in g$ gilt, ist die Zuordnung von Halbordnungen und invarianten Unterhalbgruppen eindeutig.

Die invarianten Unterhalbgruppen, die den Ordnungen von G entsprechen, nennen wir linear. Die linearen invarianten Unterhalbgruppen einer Gruppe G sind ersichtlich dadurch gekennzeichnet, daß für jedes $a \in G$ stets gilt $a \in g$ oder $a^{-1} \in g$.

§ 2.

Verbandsgruppen.

Wir untersuchen als erste wichtige Klasse von halbgeordneten Gruppen diejenigen halbgeordneten Gruppen, die einen Verband bilden. Wir nennen diese halbgeordneten Gruppen Verbandsgruppen. Zu den Verbandsgruppen gehört z. B. die Gruppe der Ideale eines endlichen algebraischen Zahlkörpers.

Satz 2. Jede halbgeordnete Gruppe G , die einen Halbverband bildet, ist eine Verbandsgruppe.

Beweis. Wir haben zu zeigen, daß für jedes $a, b \in G$ ein k. g. V. existiert, wenn die Existenz eines g. g. T. $a \wedge b$ vorausgesetzt wird. Wir setzen

$$a \vee b \equiv (a^{-1} \wedge b^{-1})^{-1}.$$

Dann folgt aus $a^{-1} \wedge b^{-1} \leq a^{-1}$ zunächst $a \vee b \geq a$, ebenso folgt $a \vee b \geq b$. Da für $x \in G$ gilt

$$x^{-1} \leq a^{-1}, x^{-1} \leq b^{-1} \Rightarrow x^{-1} \leq a^{-1} \wedge b^{-1},$$

gilt auch für jedes $x \in G$:

$$x \geq a, x \geq b \Rightarrow x \geq a \vee b.$$

Satz 3. In jeder Verbandsgruppe G gelten die folgenden Distributivgesetze:

für jedes $a, b, x, y \in G$:

$$x(a \wedge b)y \equiv xay \wedge xby$$

$$x(a \vee b)y \equiv xay \vee xby.$$

Beweis. Aus $a \wedge b \leq a$ und $a \wedge b \leq b$ folgt $x(a \wedge b)y \leq xay$ und $x(a \wedge b)y \leq xby$, also $x(a \wedge b)y \leq xay \wedge xby$. Ebenso folgt

$$x^{-1}(xay \wedge xby)y^{-1} \leq x^{-1}xayy^{-1} \wedge x^{-1}xbyy^{-1} \equiv a \wedge b,$$

woraus sich $xay \wedge xby \leq x(a \wedge b)y$ ergibt. Damit ist das erste Distributivgesetz erwiesen, das zweite ergibt sich ganz entsprechend.

Es gilt in jeder Verbandsgruppe auch das verbandstheoretische Distributivgesetz

$$a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)^9).$$

Zum Beweis brauchen wir einen Satz über teilerfremde Elemente. Wir nennen zwei Elemente a und b einer Verbandsgruppe teilerfremd, wenn $a \wedge b \equiv 1$ gilt, und schreiben hierfür $a \parallel b$. Teilerfremde Elemente sind also stets ganz.

Satz 4. Zu jedem Element c einer Verbandsgruppe gibt es bis auf Einheiten eindeutig bestimmte teilerfremde Elemente a und b mit $c \equiv ab^{-1} \equiv b^{-1}a$.

Beweis. Aus $c \equiv ab^{-1}$ und $a \parallel b$ folgt $a \equiv cb$ und $cb \wedge b \equiv 1$, also $b \equiv (1 \wedge c)^{-1} \equiv 1 \vee c^{-1}$. Hieraus folgt dann $a \equiv c(1 \vee c^{-1}) \equiv 1 \vee c$. Für $a \equiv 1 \vee c$ und $b \equiv 1 \vee c^{-1}$ folgt aus diesen Gleichungen umgekehrt $a \equiv cb$, also $c \equiv ab^{-1}$ und $a \parallel b$. Ebenso folgt $c \equiv b^{-1}a$.

Wir nennen $1 \vee c$ den Zähler, $1 \vee c^{-1}$ den Nenner von c .

Satz 5. Der Zähler des g. g. T. zweier Elemente ist gleich dem g. g. T. der Zähler¹⁰⁾.

Beweis. Aus Satz 4 folgt für jedes $x, y \in G$

$$(1 \vee (x \wedge y)) \cdot (1 \wedge (x \wedge y)) \equiv x \wedge y.$$

Ferner gilt aber auch

$$\begin{aligned} & ((1 \vee x) \wedge (1 \vee y)) \cdot ((1 \wedge x) \wedge (1 \wedge y)) \\ & \equiv (1 \vee x) \cdot (1 \wedge x) \wedge (1 \vee y) \cdot (1 \wedge y) \wedge \dots \leq x \wedge y. \end{aligned}$$

Wegen

$$(1 \wedge x) \wedge (1 \wedge y) \equiv 1 \wedge (x \wedge y)$$

folgt durch Vergleich

$$(1 \vee x) \wedge (1 \vee y) \leq 1 \vee (x \wedge y).$$

Da $(1 \vee x) \wedge (1 \vee y) \geq 1 \vee (x \wedge y)$ trivial ist, gilt also

$$(1 \vee x) \wedge (1 \vee y) \equiv 1 \vee (x \wedge y).$$

Satz 5 liefert nun sofort die verbandstheoretische Distributivität jeder Verbandsgruppe. Wir haben für $a, b, c \in G$ nur $x = a^{-1}b$ und $y = a^{-1}c$ zu setzen. Dann gilt

$$(1 \vee a^{-1}b) \wedge (1 \vee a^{-1}c) \equiv 1 \vee (a^{-1}b \wedge a^{-1}c).$$

Hieraus folgt das gesuchte Distributivgesetz

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \equiv a \vee (b \wedge c).$$

⁹⁾ Für kommutative Verbandsgruppen schon von DEDEKIND bewiesen.

¹⁰⁾ Entsprechend ist der Nenner des g. g. T. zweier Elemente gleich dem k. g. V. der Nenner. Satz 5 gilt natürlich auch für mehr als zwei Elemente.

Wie in jedem distributiven Verband gilt auch in Verbandsgruppen ein Verfeinerungssatz¹¹⁾:

Satz 6. Gilt für die Elemente $c_1 c_2, \dots, c_m$ und $c^1, \dots, c^n$ einer Verbandsgruppe $c_1 c_2, \dots, c_m \equiv c^1 c^2, \dots, c^n$, so gibt es bis auf Einheiten eindeutig bestimmte Elemente c_μ^ν ($\mu = 1, \dots, m; \nu = 1, \dots, n$), so daß

$$\begin{aligned} 1) & \quad c_\mu^1 \dots c_\mu^n \equiv c_\mu \\ 2) & \quad c_1^\nu \dots c_m^\nu \equiv c^\nu \\ 3) & \quad c_{\mu+1}^\nu \dots c_m^\nu \parallel c_{\mu+1}^{\nu+1} \dots c_m^{\nu+1} \end{aligned}$$

erfüllt ist. Sind die Elemente c_μ und c^ν ganz, so sind auch die Elemente c_μ^ν ganz.

Beweis. Wir beweisen zunächst die Existenz der Elemente c_μ^ν durch Induktion. Für $m = n = 2$ folgt aus

$$c_1 c_2 \equiv c^1 c^2$$

für die Elemente

$$c_1^1 \equiv c_1 \wedge c^1, \quad c_1^2 \equiv (c_1^1)^{-1} c_1$$

$$c_2^1 \equiv (c_1^1)^{-1} c^1, \quad c_2^2 \equiv c_2 \wedge c^2$$

wegen

$$c_2^1 \equiv (c_1^{-1} \vee (c^1)^{-1}) c^1 \equiv c_1^{-1} c^1 \vee 1 \equiv c_2 (c^2)^{-1} \vee 1 \equiv c_2 (c_2^2)^{-1}$$

und der entsprechenden Gleichung

$$c_1^2 \equiv c^2 (c_2^2)^{-1}$$

nicht nur

$$1) \quad c^1 \equiv c_1^1 c_2^1, \quad c^2 \equiv c_1^2 c_2^2,$$

sondern auch

$$2) \quad c_1 \equiv c_1^1 c_1^2, \quad c_2 \equiv c_2^1 c_2^2.$$

Ferner gilt

$$c_2^1 \wedge c_1^2 \equiv (c_1^1)^{-1} c^1 \wedge (c_1^1)^{-1} c_1 \equiv (c_1^1)^{-1} (c^1 \wedge c_1) \equiv 1,$$

also

$$3) \quad c_1^2 \parallel c_2^1.$$

Wir nehmen jetzt die Existenz als bewiesen für $m' \leq m$ und $n' < n$ an und beweisen sie hieraus für m und n .

Es sei also

$$c_1 \dots c_m \equiv c^1 \dots c^n.$$

Dann ist

$$c_1 \dots c_m \equiv c^1 \dots c^{n-2} (c^{n-1} c^n).$$

Es gibt also eine Matrix

$$(A) \quad \begin{array}{cccc} c_1^1 & \dots & c_m^1 & \\ & \dots & & \\ c_1^{n-2} & \dots & c_m^{n-2} & \\ & \dots & & \\ e_1 & \dots & e_m & \end{array}$$

¹¹⁾ Vgl. z. B. die verbandstheoretische Arbeit über den Verfeinerungssatz von O. ORE, Ann. math. Princeton, II, 36, 1935.

wobei die Produkte der Elemente der Spalten gleich $c_1 \dots c_m$ sind und die Produkte der Elemente der Zeilen gleich $c^1, \dots, c^{n-2}, c^{n-1} c^n$ sind. Insbesondere gibt die letzte Zeile

$$e_1 \dots e_m \equiv c^{n-1} c^n.$$

Hieraus folgt nach der Induktionsannahme die Existenz einer Matrix

$$(B) \quad \begin{array}{c} c_1^{n-1} \dots c_m^{n-1} \\ c_1^n \dots c_m^n, \end{array}$$

wobei die Produkte der Elemente der Spalten jetzt gleich $e_1 \dots e_m$ und die Produkte der Elemente der Zeilen gleich c^{n-1} bzw. c^n sind. Die Elemente c_μ^ν ($\mu = 1, \dots, m$, $\nu = 1, \dots, n$) erfüllen also die Bedingungen 1) und 2). Die Bedingung 3) besagt, daß in der Matrix

$$(C) \quad \begin{array}{c} c_1^1 \dots c_m^1 \\ \dots \\ c_1^n \dots c_m^n \end{array}$$

für jedes Element c_μ^ν das Produkt der rechts von ihm stehenden Elemente teilerfremd zum Produkt der unter ihm stehenden Elemente ist. Ist diese Bedingung nach Induktionsannahme für die Matrizen (A) und (B) erfüllt, so auch für (C), da ja $e_\mu \equiv c_\mu^{n-1} c_\mu^n$ ist.

Die eindeutige Bestimmtheit der Elemente c_μ^ν ergibt sich daraus, daß aus 3) folgt

$$c_\mu^\nu \dots c_\mu^n \wedge c_\mu^1 \dots c_\mu^\nu \equiv c_\mu^\nu (c_\mu^{1+1} \dots c_\mu^n \wedge c_\mu^{1+1} \dots c_\mu^\nu) \equiv c_\mu^\nu$$

und aus 1) bzw. 2)

$$\begin{aligned} c_\mu^\nu \dots c_\mu^\nu &\equiv (c_1^\nu \dots c_{\mu-1}^\nu)^{-1} c^\nu \\ c_\mu^\nu \dots c_\mu^n &\equiv (c_1^1 \dots c_\mu^{n-1})^{-1} c_\mu. \end{aligned}$$

Danach lassen sich die Elemente c_μ^ν bis auf Einheiten rekursiv berechnen. Die Ganzheit der Elemente c_μ^ν , falls c_μ und c^ν ganz sind, ergibt sich ohne weiteres ebenfalls durch Induktion.

§ 3.

Hauptgruppen.

Zu den Verbandsgruppen gehören insbesondere die geordneten Gruppen. Gilt $a \leq b$ in einer geordneten Gruppe G für $a, b \in G$, so ist a der g. g. T. von a und b . Wir bezeichnen daher den g. g. T. von a und b in geordneten Gruppen mit $\min(a, b)$.

Satz 7. Eine Verbandsgruppe G ist genau dann geordnet, wenn für jedes $a, b \in G$ gilt

$$a > 1, b > 1 \Rightarrow a \wedge b > 1.$$

Beweis. Diese Bedingung ist in geordneten Gruppen ersichtlich erfüllt. Umgekehrt folgt aus ihr für jedes $a \in G$ wegen $1 \vee a \parallel 1 \vee a^{-1}$, daß stets $1 \vee a \equiv 1$ oder $1 \vee a^{-1} \equiv 1$ gelten muß, d. h. es gilt stets $a \leq 1$ oder $a \geq 1$.

Jedes direkte Produkt von geordneten Gruppen ist ebenfalls eine Verbandsgruppe. Sind G_τ geordnete Gruppen mit den Ordnungen $\leq_\tau$, so besteht das direkte Produkt aus den „Vektoren“ $\{\dots, s_\tau, \dots\}$, die aus jeder Gruppe G_τ genau ein Element a_τ enthalten. Sind

$$a = \{\dots, a_\tau, \dots\}, \quad b = \{\dots, b_\tau, \dots\}$$

Vektoren, so setze man $ab = \{\dots, a_\tau b_\tau, \dots\}$ und setze fest, daß $a \leq b$ genau dann gelten soll, wenn für jedes $\tau: a_\tau \leq_\tau b_\tau$ gilt.

Wir nennen diese direkten Produkte von geordneten Gruppen Vektorgruppen. Jede Vektorgruppe ist eine Verbandsgruppe, es ist nämlich

$$a \wedge b = \{\dots, \min(a_\tau, b_\tau), \dots\}.$$

Satz 8. In einer Vektorgruppe G gilt für jedes $a, x \in G$

$$a \parallel x a x^{-1} \Rightarrow a \equiv 1.$$

Beweis. Wir haben nur nachzuweisen, daß diese Bedingung für geordnete Gruppen gilt. Aus $a > 1 \Rightarrow x a x^{-1} > 1$ folgt aber sofort $a > 1 \Rightarrow \min(a, x a x^{-1}) > 1$.

Wir nennen jede Verbandsgruppe, die die Bedingung des Satzes 8 erfüllt, regulär. Also ist jede Vektorgruppe eine reguläre Verbandsgruppe¹²⁾.

Dieser Satz läßt sich nicht umkehren, wohl aber gilt, daß jede reguläre Verbandsgruppe Untergruppe einer Vektorgruppe ist. Dieses wollen wir im Folgenden beweisen.

Wir definieren zunächst: Jede Untergruppe einer Vektorgruppe heißt eine Hauptgruppe.

Ist eine Vektorgruppe G das direkte Produkt der geordneten Gruppen G_τ , so liefert jedes G_τ eine Ordnung von G , wenn man für zwei Vektoren $a = \{\dots, a_\tau, \dots\}$ und $b = \{\dots, b_\tau, \dots\}$ festsetzt, daß $a \leq_\tau b$ genau dann gelten soll, wenn $a_\tau \leq_\tau b_\tau$ in G_τ gilt. Es gilt dann $a \leq b$ genau dann, wenn für jedes $\tau: a \leq_\tau b$ gilt.

Ist nun eine Hauptgruppe H gegeben und G eine Obervektorgruppe von H , so induziert jede Ordnung von G auch eine Ordnung von H ¹³⁾. Es gibt also Ordnungen $\leq$ von H , so daß für jedes $a, b \in H$ genau

¹²⁾ Ersichtlich ist jede kommutative Verbandsgruppe regulär.

¹³⁾ d. h. zu jeder Ordnung $\leq$ von G gibt es genau eine Ordnung $\leq$ von H , so daß für jedes $a, b \in H$ gilt: $a \leq b \Leftrightarrow a \leq_\tau b$. Wir bezeichnen dann die Ordnungen $\leq$ und $\leq_\tau$ mit demselben Zeichen.

dann $a \leq b$ gilt, wenn für jedes $\tau: a \leq_{\tau} b$ gilt. Gibt es umgekehrt zu einer beliebigen halbgeordneten Gruppe H Ordnungen $\leq_{\tau}$ von H , so daß für jedes $a, b \in H$ genau dann $a \leq b$ gilt, wenn für jedes $\tau: a \leq_{\tau} b$ gilt, so ist H eine Hauptgruppe. Das direkte Produkt der bzgl. $\leq_{\tau}$ geordneten Gruppen H ist nämlich dann eine Vektorgruppe, die H isomorph enthält¹⁴). Eine Hauptgruppe ist also einfach dadurch gekennzeichnet, daß sich ihre Halbordnung $\leq$ durch Ordnungen $\leq_{\tau}$ darstellen läßt, indem für jedes $a, b \in H$ gilt

$$a \leq b \Leftrightarrow \text{für jedes } \tau: a \leq_{\tau} b.$$

Wir nennen in diesem Falle die Halbordnung $\leq$ die „Konjunktion“ der Ordnungen $\leq_{\tau}$.

Für die zu $\leq$ bzw. $\leq_{\tau}$ zugehörigen Halbgruppen g bzw. g_{τ} bedeutet dies, daß g der Durchschnitt der g_{τ} ist:

$$g = \bigcap_{\tau} g_{\tau}.$$

Damit haben wir erhalten, daß eine halbgeordnete Gruppe genau dann Hauptgruppe ist, wenn die zugehörige Halbgruppe Durchschnitt von linearen, invarianten Unterhalbgruppen von G ist.

Um zu beweisen, daß jede reguläre Verbandsgruppe G Hauptgruppe ist, haben wir also die Existenz von linearen, invarianten Unterhalbgruppen nachzuweisen, deren Durchschnitt die zugehörige Halbgruppe von G ist. Dieser Nachweis beruht auf dem Homomorphiebegriff. Die gesuchten linearen Unterhalbgruppen werden nämlich eineindeutig gewissen maximalen Homomorphismen von G entsprechen.

Wir definieren zunächst wegen einer späteren Anwendung allgemein den Homomorphiebegriff für Halbverbandshalbgruppen, d. h. für halbgeordnete Halbgruppen, die bzgl. ihrer Halbordnung einen Halbverband bilden und die das distributive Gesetz erfüllen:

für jedes a, b, x, y

$$x(a \wedge b)y \equiv xay \wedge xby.$$

Es seien H und H' Halbverbandshalbgruppen und $\rightarrow$ eine Abbildung von H in H' , die für jedes $a, b \in H, a', b' \in H'$ mit $a \rightarrow a'$ und $b \rightarrow b'$ erfüllt:

- 1) $a \leq b \Rightarrow a' \leq b'$
- 2) $a \wedge b \rightarrow a' \wedge b'$
- 3) $ab \rightarrow a'b'.$

Eine solche Abbildung nennen wir einen Homomorphismus von H .

¹⁴) Die Vektorgruppe besteht aus den Vektoren $\{\dots, a_{\tau} \dots\}$, die zu jeder Ordnung $\leq_{\tau}$ genau ein $a_{\tau} \in H$ enthalten. Bildet man $a \in H$ auf den Vektor $\{\dots, a_{\tau} \dots\}$, in dem für jedes $\tau: a_{\tau} = a$ gilt, ab, so entsteht eine isomorphe Abbildung von H in die Vektorgruppe.

Jeder Homomorphismus definiert eine Relation $\leq$ in H auf folgende Weise. Wir setzen fest, daß $a \leq b$ in H genau dann gelten soll, wenn $a' \leq b'$ in H' gilt. H ist bzgl. dieser Relation wieder eine Halbverbandshalbgruppe und die Relation $\leq$ erfüllt:

$$\text{I)} \quad a \leq b \Rightarrow a \leq b$$

$$\text{II)} \quad x \leq a, x \leq b \Rightarrow x \leq a \wedge b.$$

Es gilt auch die Umkehrung: Ist $\leq$ eine Halbordnung von H , die I) und II) erfüllt, so ist H bzgl. $\leq$ eine Halbverbandshalbgruppe (wir wollen diese mit H' bezeichnen) und die Abbildung $a \rightarrow a'$ von H auf H' ist ein Homomorphismus.

Die Bedingung 1) folgt nämlich aus I). Für die Gültigkeit von 2) hat man zu zeigen, daß das Element $a \wedge b$ nicht nur in H (d. h. bzgl. $\leq$) der g. g. T. von a und b ist, sondern auch in H' (d. h. bzgl. $\leq$). Wegen I) und $a \wedge b \leq a$ und $a \wedge b \leq b$ gilt aber

$$a \wedge b \leq a \quad \text{und} \quad a \wedge b \leq b.$$

Zusammen mit II) folgt hieraus die Behauptung. Zugleich ist damit erwiesen, daß H' eine Halbverbandshalbgruppe ist.

Aufgrund dieser Gleichwertigkeit betrachten wir statt der Homomorphismen von H nur die Halbordnungen von H , die I) und II) erfüllen. Wir nennen diese Halbordnungen kurz die zulässigen Halbordnungen von H .

Zwei Homomorphismen von H , die dieselbe zulässige Halbordnung definieren, nennen wir äquivalent. Es entsprechen dann also die Homomorphismen von H bis auf Äquivalenz eindeutig den zulässigen Halbordnungen von H .

Für eine Verbandsgruppe G entsprechen die zulässigen Halbordnungen von G aber auch eindeutig gewissen Unterhalbgruppen von G . Aus Satz 1 folgt nämlich sofort:

Ist $\mathfrak{g}$ die zugehörige Halbgruppe einer Verbandsgruppe G , so entsprechen die zulässigen Halbordnungen von G eindeutig den invarianten Unterhalbgruppen $\mathfrak{g}$ von G , die für jedes $a, b \in G$

$$\text{I)} \quad \mathfrak{g} \leq \mathfrak{g} \quad \text{II)} \quad a \in \mathfrak{g}, b \in \mathfrak{g} \Rightarrow a \wedge b \in \mathfrak{g}$$

erfüllen.

Diese Halbgruppen $\mathfrak{g}$ nennen wir die zulässigen Halbgruppen von G . Die Homomorphismen einer Verbandsgruppe G entsprechen also bis auf Äquivalenz eindeutig den zulässigen Halbgruppen von G .

Die zulässigen Halbgruppen einer Verbandsgruppe lassen sich nun durch „Quotientenbildung“ aus der zugehörigen Halbgruppe $\mathfrak{g}$ gewinnen. Dazu haben wir invariante Unterhalbgruppen S von $\mathfrak{g}$ zu betrachten.

Gilt für jedes $a, b \in g$

$$a \leq b, b \in S \Rightarrow a \in S,$$

so nennen wir S vollständig¹⁵⁾.

Satz 9. Die Homomorphismen einer Verbandsgruppe G entsprechen bis auf Äquivalenz eineindeutig den vollständigen, invarianten Unterhalbgruppen der zugehörigen Halbgruppe g .

Beweis. Ist $\dot{g}$ eine zulässige Halbgruppe, so ist der Durchschnitt $S = \dot{E} \cap g$ der Einheitengruppe $\dot{E}$ von $\dot{g}$ mit g ersichtlich eine vollständige, invariante Unterhalbgruppe von g ¹⁶⁾. Ist umgekehrt S eine beliebige, vollständige invariante Unterhalbgruppe von g , so sei $\dot{g}$ die Menge der $a \in G$, deren Nenner in S liegt, d. h. $1 \vee a^{-1} \in S$. Wir zeigen, daß $\dot{g}$ eine zulässige Halbgruppe ist.

Zunächst gilt für jedes $a \in G$

$$a \in g \Rightarrow a \in \dot{g}$$

$$(\text{denn } a \geq 1 \Rightarrow 1 \vee a^{-1} \equiv 1 \in S).$$

Für jedes $a, b \in G$ gilt

$$a \in \dot{g}, b \in \dot{g} \Rightarrow ab \in \dot{g}$$

$$(\text{denn } 1 \vee b^{-1}a^{-1} \leq (1 \vee b^{-1})(1 \vee a^{-1}) \in S).$$

Für jedes $a, x \in G$ gilt

$$a \in g \Rightarrow xax^{-1} \in \dot{g}$$

$$(\text{denn } 1 \vee xax^{-1} \equiv x(1 \vee a^{-1})x^{-1} \in S).$$

Für jedes $a, b \in G$ gilt

$$a \in \dot{g}, b \in \dot{g} \Rightarrow a \wedge b \in \dot{g}$$

$$(\text{denn } 1 \vee (a \wedge b)^{-1} \equiv 1 \vee a^{-1} \vee b^{-1} \leq (1 \vee a^{-1})(1 \vee b^{-1}) \in S).$$

Die behauptete Eineindeutigkeit ergibt sich daraus, daß die Einheitengruppe $\dot{E}$ von $\dot{g}$ aus den $a \in G$ besteht, für die Zähler und Nenner in S liegen. $\dot{E} \cap g$ besteht also aus den ganzen Elementen, deren Zähler und Nenner in S liegen. Da aber für ein ganzes Element a der Zähler a ist und der Nenner 1, so ist $\dot{E} \cap g = S$.

Nennen wir jetzt eine zulässige Halbgruppe regulär, wenn sie einem Homomorphismus in eine reguläre Verbandsgruppe entspricht, so sind also die regulären, zulässigen Halbgruppen $\dot{g}$ dadurch gekennzeichnet, daß die Einheitengruppe $\dot{E}$ für jedes $a, x \in G$ die Bedingung

$$a \wedge xax^{-1} \in \dot{E} \Rightarrow a \in \dot{E}$$

¹⁵⁾ Die vollständigen invarianten Unterhalbgruppen treten an die Stelle der „vollständigen multiplikativ abgeschlossenen Systeme“ in der kommutativen Theorie.

¹⁶⁾ S enthält die Elemente a von g , für die in der $\dot{g}$ entsprechenden Halbordnung $\leq$ gilt: $a \leq 1$. Wegen $a \leq b, b \leq 1 \Rightarrow a \leq 1$ ist also S vollständig.

erfüllt. Hieraus ergibt sich für die vollständige, invariante Unterhalbgruppe $S = \dot{E} \cap g$

$$a \wedge xax^{-1} \in S \Rightarrow a \in S.$$

Wir nennen diese vollständigen, invarianten Unterhalbgruppen S von g ebenfalls regulär. Dann ist für eine reguläre, vollständige, invariante Unterhalbgruppe S die zulässige Halbgruppe $\dot{g}$ der Elemente a mit $1 \vee a^{-1} \in S$ nämlich regulär, da aus $a \wedge xax^{-1} \in \dot{E}$ zunächst $a \in \dot{g}$ folgt, aber wegen

$$(1 \vee a) \wedge x(1 \vee a)x^{-1} \equiv 1 \vee (a \wedge xax^{-1}) \in S$$

auch $1 \vee a \in S$, also $a^{-1} \in \dot{g}$ und $a \in \dot{E}$.

Damit ist erwiesen, daß die Homomorphismen einer Verbandsgruppe in eine reguläre Verbandsgruppe eineindeutig (bis auf Äquivalenz) den regulären, zulässigen Halbgruppen $\dot{g}$ und auch den regulären, vollständigen invarianten Unterhalbgruppen S der zugehörigen Halbgruppe entsprechen.

Zu den regulären, zulässigen Halbgruppen einer Verbandsgruppe G gehören insbesondere die linearen, zulässigen Halbgruppen. Entspricht die vollständige, invariante Unterhalbgruppe S einer linearen, zulässigen Halbgruppe $\dot{g}$, so gilt für jedes $a, b \in g$

$$(1) \quad a \bar{\in} S, b \bar{\in} S \Rightarrow a \wedge b \bar{\in} S,$$

denn $a \bar{\in} S$ bedeutet $a > 1^{17)}$, $b \bar{\in} S$ bedeutet $b > 1$, also gilt $a \wedge b > 1$, d. h. $a \wedge b \bar{\in} S$.

Wir nennen die vollständigen, invarianten Unterhalbgruppen S mit der Eigenschaft (1) „prim“.

Satz 10. Die zulässigen Ordnungen einer Verbandsgruppe entsprechen eineindeutig den primen, vollständigen, invarianten Unterhalbgruppen der zugehörigen Halbgruppen.

Beweis. Ist S eine prime, vollständige, invariante Unterhalbgruppe von G und gilt $a > 1^{18)}$ und $b > 1$, so gilt $1 \vee a \bar{\in} S$ und $1 \vee b \bar{\in} S$. Also gilt auch

$$(1 \vee a) \wedge (1 \vee b) \equiv 1 \vee (a \wedge b) \bar{\in} S,$$

d. h. $a \wedge b > 1$. Nach Satz 7 ist also $\leq$ eine Ordnung.

Für die nächsten beiden Sätze sei G eine Verbandsgruppe, g die zugehörige Halbgruppe und $c \in g$.

Satz 11. Ist S eine reguläre, vollständige, invariante Unterhalbgruppe von g , so ist auch die Menge S_c der $a \in g$ mit $a \wedge c \in S$ eine reguläre, vollständige, invariante Unterhalbgruppe von g .

¹⁷⁾ Mit $\leq$ bezeichnen wir die zulässige Ordnung, die $\dot{g}$ entspricht.

¹⁸⁾ S entspricht eine zulässige Halbgruppe $\dot{g}$. $\dot{g}$ entspricht eine Halbordnung. Diese Halbordnung bezeichnen wir mit $\leq$.

Beweis. Es gilt $S \leq S_e$ (denn $a \in S \Rightarrow a \wedge c \in S$).

Für jedes $a, b \in g$ gilt

$$a \in S_e, b \in S_e \Rightarrow ab \in S_e$$

(denn aus $a \wedge c \in S$ und $b \wedge c \in S$ folgt

$$ab \wedge ac \wedge cb \wedge c^2 \equiv (a \wedge c)(b \wedge c) \in S,$$

woraus $ab \wedge c \in S$ folgt, wegen $c \leq ac \wedge cb \wedge c^2$).

Für jedes $a, x \in G$ gilt

$$a \in S_e \Rightarrow xax^{-1} \in S_e$$

(denn aus $a \wedge c \in S$ folgt $a \wedge x^{-1}cx \wedge xax^{-1} \wedge c \in S$, also, da S regulär ist, $xax^{-1} \wedge c \in S$).

Für jedes $a, x \in G$ gilt

$$a \wedge xax^{-1} \in S_e \Rightarrow a \in S_e$$

(denn aus $a \wedge xax^{-1} \wedge c \in S$ folgt wie eben $a \wedge c \in S$).

Für jedes $a, b \in g$ gilt

$$a \leq b, b \in S_e \Rightarrow a \in S_e$$

(denn aus $b \wedge c \in S$ und $a \leq b$ folgt $a \wedge c \in S$).

Satz 12. Eine reguläre vollständige invariante Unterhalbgruppe S von g mit $c \bar{\in} S$ ist prim, wenn S maximal ist bzgl. der Eigenschaft $c \bar{\in} S^{(19)}$.

Beweis. Aus $a \wedge b \in S$ folgt für $a \bar{\in} S$ zunächst $S_b \supset S$, also $c \in S_b$ wegen der Maximalität von S . Hieraus folgt $b \in S_e$, denn $c \in S_b$ und $b \in S_e$ bedeuten ja beide $b \wedge c \in S$. Nun gilt wegen $c \bar{\in} S$ auch $c \bar{\in} S_e$, also $S_e = S$ wegen der Maximalität von S . Damit folgt $b \in S$.

Jetzt erst kommen wir zum eigentlichen Beweis von

Satz 13. Jede reguläre Verbandsgruppe ist Hauptgruppe.

Es sei G eine reguläre Verbandsgruppe und g die zugehörige Halbgruppe. Wir wollen zeigen, daß es lineare, zulässige Halbgruppen $\bar{g}$ gibt, deren Durchschnitt g ist. Sei dazu c ein Element von G mit $c \bar{\in} g$. Dann gilt $1 \vee c^{-1} > 1$. Es gibt also eine reguläre, vollständige, invariante Unterhalbgruppe S_0 von g mit $1 \vee c^{-1} \bar{\in} S_0$, nämlich die Einheitengruppe von G . Durch Wohlordnung läßt sich jetzt eine maximale, reguläre, vollständige, invariante Unterhalbgruppe S von g konstruieren mit $1 \vee c^{-1} \bar{\in} S$, d. h. es soll für jede reguläre, vollständige, invariante Unterhalbgruppe S' mit $S \subset S'$ gelten: $1 \vee c^{-1} \in S'$. Dieser Wohlordnungsschluß beruht einfach darauf, daß für jede wohlgeordnete Folge

$$S_0 \leq \dots \leq S_\tau \leq \dots$$

¹⁹⁾ S heißt maximal, wenn für jede reguläre, vollständige, invariante Unterhalbgruppe S' gilt:

$$S \subset S' \Rightarrow c \in S'.$$

von regulären, vollständigen, invarianten Unterhalbgruppen S_τ mit $1 \vee c^{-1} \bar{\in} S_\tau$ auch die Vereinigung $S' = \bigcup_\tau S_\tau$ eine reguläre, vollständige, invariante Unterhalbgruppe mit $1 \vee c^{-1} \bar{\in} S'$ ist²⁰⁾. Dies ist aber unmittelbar einzusehen. Also gibt es ein maximales S . Dieses ist nach Satz 12 prim, entspricht also nach Satz 10 einer linearen, zulässigen Halbgruppe $\bar{g}$ mit $c \bar{\in} \bar{g}$ wegen $1 \vee c^{-1} \bar{\in} S$. Da es zu jedem $c \bar{\in} \bar{g}$ eine solche zulässige, lineare Halbgruppe $\bar{g}$ gibt, ist der Durchschnitt aller dieser $\bar{g}$ also $\bar{g}$.

Der Beweis von Satz 13 liefert noch etwas mehr als den Satz. Es wird nämlich bewiesen, daß die Halbordnung einer regulären Verbandsgruppe nicht nur Konjunktion von Ordnungen ist, sondern sogar Konjunktion von zulässigen Ordnungen. Dieses Ergebnis läßt sich umkehren:

Ist die Halbordnung einer Verbandsgruppe G Konjunktion von zulässigen Ordnungen, so ist G regulär.

Der Beweis dieser Umkehrung entspricht genau dem Beweis von Satz 8.

Aus Satz 13 folgt ferner, daß auch jede Untergruppe einer regulären Verbandsgruppe Hauptgruppe ist.

Wegen Satz 8 gilt auch hier die Umkehrung, daß jede Hauptgruppe Untergruppe einer regulären Verbandsgruppe ist.

Zusammengefaßt erhalten wir also eine Kennzeichnung der Hauptgruppen, die unabhängig ist vom Ordnungsbegriff. Die Bedeutung dieser Kennzeichnung liegt darin, daß sich die Ordnungen einer Gruppe im allgemeinen nur mit Wohlordnungsschlüssen konstruieren lassen — die Oberverbandsgruppen dagegen lassen sich auch ohne Wohlordnung konstruieren mit Hilfe des Idealbegriffs.

§ 4.

Idealsysteme.

Wir definieren den Idealbegriff zunächst für beliebige halbgeordnete Mengen.

Unter einem Idealsystem $\mathfrak{S}$ einer halbgeordneten Menge M verstehen wir einen minimalen Oberhalbverband von M . Ein Oberhalbverband von M enthält zu endlich vielen Elementen a_μ von M ($\mu = 1, \dots, m$) stets den g. g. T. $a_1 \wedge \dots \wedge a_m$. Er heißt minimal, wenn er nur aus Elementen dieser Form besteht. Es gibt dann nämlich keinen echten Unterhalbverband, der auch noch M umfaßt.

Die Bezeichnung Idealsystem für jeden minimalen Oberhalbverband rechtfertigt sich dadurch, daß sich für kommutative, halbgeordnete

²⁰⁾ Dieser Wohlordnungsschluß ist immer derselbe, vgl. z. B. N. BOURBAKI Actual Scient. et Ind., Nr. 846.

Gruppen die Gleichwertigkeit dieser Definition mit der üblichen herausstellen wird²¹⁾.

Es gilt zunächst, daß sich jedes Idealsystem einer halbgeordneten Menge M durch Untermengen von M darstellen läßt.

Ist nämlich ein Idealsystem $\mathfrak{S}$ gegeben, so ordne man je endlich vielen Elementen a_μ von M ($\mu = 1, \dots, m$) eine Untergruppe $(a_1, \dots, a_m)$ von M zu, indem man festsetzt, daß $a \in (a_1, \dots, a_m)$ gelten soll, wenn $a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq a$ in $\mathfrak{S}$ gilt.

Dann gilt ersichtlich

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq b_1 \wedge \dots \wedge b_n$$

genau dann, wenn

$$(a_1, \dots, a_m) \supseteq (b_1, \dots, b_n)$$

gilt.

Den Elementen a von M wird dabei die Untergruppe (a) der $b \in M$ mit $a \leq b$ zugeordnet. (a) heißt Hauptideal. Die Definition der Hauptideale ist unabhängig vom Idealsystem. Es gilt $a \leq b$ genau dann, wenn $(a) \supseteq (b)$ gilt.

Für die Untergruppen $(a_1, \dots, a_m)$ gilt

$$1) \quad a_\mu \in (a_1, \dots, a_m) \quad (\mu = 1, \dots, m)$$

$$2) \quad b_\nu \in (a_1, \dots, a_m) \Rightarrow (b_1, \dots, b_n) \subseteq (a_1, \dots, a_m),$$

denn in dem Halbverband $\mathfrak{S}$ gelten ja die Formeln

$$1) \quad a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq a_\mu$$

$$2) \quad a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq b_\nu \Rightarrow a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq b_1 \wedge \dots \wedge b_n.$$

Jedes Idealsystem ordnet also jeder endlichen Untergruppe $\alpha = \{a_1, \dots, a_m\}$ eine Untergruppe $\alpha' = (a_1, \dots, a_m)$ von M zu, so daß

$$1) \quad \alpha \subseteq \alpha'$$

$$2) \quad \alpha \subseteq \beta' \Rightarrow \alpha' \subseteq \beta'$$

$$3) \quad \{\alpha\}' = (a)$$

erfüllt ist.

Definiert man „vollständige“ Idealsysteme als minimale vollständige Oberhalbverbände²²⁾, so erhält man genau entsprechend eine Zuordnung, die jetzt jeder beliebigen Untergruppe α eine Untergruppe α' zuordnet, so daß 1)–3) erfüllt ist.

²¹⁾ Vgl. H. PRÜFER, J. reine angew. Math. 168, 1932.

²²⁾ Ein Halbverband H heißt vollständig, wenn es zu beliebig vielen $a_\tau \in H$ stets ein $c \in H$ gibt, daß die Bedingungen

$$\text{für jedes } \tau: c \leq a_\tau$$

$$\text{für jedes } x \in H: (\text{für jedes } \tau: x \leq a_\tau) \Rightarrow x \leq c$$

erfüllt. c heißt der g. g. T. der a_τ .

Ist umgekehrt eine Zuordnung gegeben, die jeder endlichen bzw. jeder Untermenge α von M eine Untermenge α' zuordnet, so daß 1)—3) erfüllt ist, so bilden die Untermengen α' ein Idealsystem bzw. ein vollständiges Idealsystem von M . Zum Beweis hat man nur zu beachten, daß unter Voraussetzung von 1) und 2) für endlich viele bzw. beliebig viele Untermengen α_i die folgenden Formeln gleichwertig sind:

$$\text{für jedes } \tau: \quad \alpha'_\tau \leq \alpha'$$

$$\text{für jedes } \tau: \quad \alpha_\tau \leq \alpha'$$

$$\bigcup_\tau \alpha_\tau \leq \alpha'$$

$$(\bigcup_\tau \alpha_\tau)' \leq \alpha'.$$

Dabei bezeichnet $\bigcup_\tau \alpha_\tau$ die Vereinigung der α_τ . Die Gleichwertigkeit der ersten und letzten Formel besagt, daß $(\bigcup_\tau \alpha_\tau)'$ der g. g. T.²³⁾ der α'_τ ist.

Unter Voraussetzung von 1) läßt sich 2) ersetzen durch die beiden Bedingungen

$$2a) \quad \alpha \leq \mathfrak{b} \Rightarrow \alpha' \leq \mathfrak{b}'$$

$$2b) \quad \alpha'' \leq \alpha'.$$

Zum Beweis gelte 1) und 2). Dann gilt $\alpha \leq \mathfrak{b} \Rightarrow \alpha \leq \mathfrak{b}'$ nach 1), also $\alpha \leq \mathfrak{b} \Rightarrow \alpha' \leq \mathfrak{b}'$ nach 2). Ferner gilt $\alpha' \leq \alpha' \Rightarrow \alpha'' \leq \alpha'$ nach 2). Gilt 1), 2a) und 2b), so gilt $\mathfrak{b}'' = \mathfrak{b}'$ nach 1) und 2b).

Ferner gilt dann $\alpha \leq \mathfrak{b}' \Rightarrow \alpha' \leq \mathfrak{b}''$ nach 2a), also

$$\alpha \leq \mathfrak{b}' \Rightarrow \alpha' \leq \mathfrak{b}'.$$

Die Bedingung 2) ist aber unter Voraussetzung von 1) auch gleichwertig mit der Bedingung

$$2') \quad (\alpha' \cup \mathfrak{b}')' \leq (\alpha \cup \mathfrak{b})' \text{ }^{24)}.$$

Zum Beweis gelte wieder 1) und 2). Dann gilt

$$\alpha' \leq (\alpha \cup \mathfrak{b})'$$

$$\mathfrak{b}' \leq (\alpha \cup \mathfrak{b})',$$

also

$$\alpha' \cup \mathfrak{b}' \leq (\alpha \cup \mathfrak{b})'$$

$$(\alpha' \cup \mathfrak{b}')' \leq (\alpha \cup \mathfrak{b})'.$$

²³⁾ In mengentheoretischer Auffassung ist natürlich $(\bigcup_\tau \alpha_\tau)'$ das k. g. V. der α'_τ .

²⁴⁾ $\cup$ bezeichnet die mengentheoretische Vereinigung.

Gilt 1) und 2'), so folgt:

$$\begin{aligned} a \leq b &\Rightarrow a \cup b = b \\ &\Rightarrow (a \cup b)' = b' \\ &\Rightarrow (a' \cup b')' \leq b' \\ &\Rightarrow a' \cup b' \leq b' \\ &\Rightarrow a' \leq b'. \end{aligned}$$

Der Idealbegriff ist für halbgeordnete Gruppen in dieser Form noch zu unbestimmt. Als Idealsystem einer halbgeordneten Halbgruppe H wollen wir nur diejenigen Idealsysteme der halbgeordneten Menge H bezeichnen, in denen durch die Festsetzung

$$(a_1 \wedge a_2 \dots \wedge a_m)(b_1 \wedge \dots \wedge b_n) \equiv a_1 b_1 \wedge \dots \wedge a_m b_n$$

eine Multiplikation definiert werden kann.

Das ist genau dann der Fall, wenn für jedes $x, y \in H$ gilt

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq b_1 \wedge \dots \wedge b_n \Rightarrow x a_1 y \wedge \dots \wedge x a_m y \leq x b_1 y \wedge \dots \wedge x b_n y.$$

Diese Bedingung ist wiederum gleichwertig mit

$$4) \quad a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq a \Rightarrow x a_1 y \wedge \dots \wedge x a_m y \leq x a y.$$

Ein Idealsystem einer halbgeordneten Halbgruppe H ist also ein minimaler Oberhalbverband von H , der 4) erfüllt.

Jedes Idealsystem einer halbgeordneten Halbgruppe ist aber ersichtlich sogar eine Halbverbandshalbgruppe.

Stellt man die Idealsysteme von H durch Untermengen von H dar, so sollen nach Obigem die Untermengen a' außer 1)—3) auch die Bedingung

$$4) \quad a \in a' \Rightarrow x a y \in (x a y)'$$

erfüllen. Dabei ist mit $x a y$ die Menge der Elemente $x a y$ ($a \in a$) bezeichnet. Statt 4) können wir auch schreiben

$$x a' y \leq (x a y)'.$$

Unter Voraussetzung von 1) und 2) ist 4) gleichwertig mit

$$4') \quad a' b' \leq (a b)'.$$

Zum Beweis gelte 1), 2) und 4). Dann gilt für jedes Element y von b :

$$a' y \leq (a y)' \leq (a b)',$$

woraus $a' b \leq (a b)'$ folgt.

Ebenso ist $a' b' \leq (a' b)'$ zu beweisen. Also gilt

$$a' b' \leq (a b)'' \leq (a b)'.$$

Gilt umgekehrt 1) und 4'), so gilt

$$x a' \leq \{x\}' a' \leq (x a)'$$

also

$$x a' y \leq (x a)' y \leq (x a y)'$$

Über diesen Idealbegriff für halbgeordnete Halbgruppen beweisen wir jetzt

Satz 14. Zu jeder halbgeordneten Halbgruppe H gibt es ein Idealsystem $\mathfrak{S}_s$, das in jedes Idealsystem von H homomorph abgebildet werden kann (wobei die Elemente von H auf sich abgebildet werden).

Beweis. Wir definieren das Idealsystem $\mathfrak{S}_s$, indem wir für die Folgen von endlich vielen Elementen a_μ von M ($\mu = 1, \dots, m$), die wir jetzt durch $a_1 \wedge \dots \wedge a_m$ bezeichnen wollen, eine Halbordnung $\leq_s$ definieren. Wir setzen fest, daß

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq_s b_1 \wedge \dots \wedge b_n$$

genau dann gelten soll, wenn für jedes b_ν ein a_μ existiert mit $a_\mu \leq b_\nu$. Dann bilden die Folgen $a_1 \wedge \dots \wedge a_m$ bezügl. dieser Relation $\leq_s$ ein Idealsystem. Dieses System nennen wir das s -System. Wir haben zu beweisen:

$$1) a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq_s a_\mu \quad (\mu = 1, \dots, m)$$

$$2) a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq_s b_\nu \quad (\nu = 1, \dots, n) \Rightarrow a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq_s b_1 \wedge \dots \wedge b_n$$

$$3) a \leq_s b \Leftrightarrow a \leq b$$

$$4) a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq_s a \Rightarrow x a_1 y \wedge \dots \wedge x a_m y \leq_s x a y.$$

Diese Formeln folgen aber alle unmittelbar aus der Definition von $\leq_s$. Daß jedes andere Idealsystem homomorph zum s -System ist, bedeutet nach § 3:

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq_s b_1 \wedge \dots \wedge b_n \Rightarrow a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq b_1 \wedge \dots \wedge b_n.$$

Aus $a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq_s b_1 \wedge \dots \wedge b_n$ folgt aber für jedes b_ν : $a_\mu \leq b_\nu$. Also gilt für jedes Idealsystem $a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq a_\mu \leq b_\nu$, d. h. $a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq b_1 \wedge \dots \wedge b_n$ ²⁵⁾.

Satz 15. Zu jeder halbgeordneten Halbgruppe H gibt es ein Idealsystem $\mathfrak{S}_v$, das v -System, so daß jedes Idealsystem von H sich homomorph auf das v -System abbilden läßt.

²⁵⁾ In der Darstellung durch Untermengen hätten wir $a \in (a_1 \dots, a_m)_s$ zu setzen, wenn $a \in (a_\mu)$ für mindestens ein a_μ , also

$$(a_1 \dots, a_m)_s = (a_1) \cup \dots \cup (a_m).$$

Das vollständige s -System ließe sich durch

$$a_s = \bigcup_{a \in a} (a)$$

definieren. Vgl. ²⁾.

Beweis. Wir definieren wie im Beweis zu Satz 14 für beliebige Elemente $a_\mu, b_\nu \in H$ eine Relation $\leq_v$ zwischen den endlichen Folgen aus diesen Elementen, indem wir festsetzen, daß

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq_v b_1 \wedge \dots \wedge b_n$$

genau dann gelten soll, wenn für jedes $x, y, z \in H$ gilt

$$z \leq x_1 a_1 y, \dots, z \leq x_m a_m y \Rightarrow z \leq x b_\nu y \quad (\nu = 1, \dots, n).$$

Dann gilt ersichtlich

$$1) \quad a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq_v a_\mu \quad (\mu = 1, \dots, m)$$

$$2) \quad a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq_v b_\nu \quad (\nu = 1, \dots, n) \Rightarrow a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq_v b_1 \wedge \dots \wedge b_n.$$

Aus $a \leq b$ ergibt sich wegen $xay \leq xby$ sofort

$$z \leq xay \Rightarrow z \leq xby,$$

also $a \leq_v b$. Umgekehrt folgt hieraus wegen

$$a \leq 1a1 \Rightarrow a \leq 1b1$$

sofort $a \leq b$. Damit ist bewiesen:

$$3) \quad a \leq_v b \Leftrightarrow a \leq b.$$

Um 4) $a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq_v a \Rightarrow xa_1y \wedge \dots \wedge xa_my \leq_v xay$

zu beweisen, gelte $z \leq u(xa_\mu y)v$ für $\mu = 1, \dots, m$. Dann gilt auch $z \leq (ux)a_\mu(yv)$, also $z \leq (ux)a(yv)$, wenn $a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq_v a$ vorausgesetzt wird. Damit ist schon $xa_1y \wedge \dots \wedge xa_my \leq_v xay$ bewiesen.

Daß sich jedes Idealsystem von H homomorph auf das v -System abbilden läßt, bedeutet

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq b_1 \wedge \dots \wedge b_n \Rightarrow a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq_v b_1 \wedge \dots \wedge b_n.$$

Tatsächlich folgt für jedes Idealsystem unter Voraussetzung von $a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq b_1 \wedge \dots \wedge b_n$ aus $z \leq xa_\mu y$ ($\mu = 1, \dots, m$) zunächst $z \leq xa_1y \wedge \dots \wedge xa_my$ und dann $z \leq xb_1y \wedge \dots \wedge xb_ny$ wegen $xa_1y \wedge \dots \wedge xa_my \leq xb_1y \wedge \dots \wedge xb_ny$, also $z \leq xb_\nu y$ ($\nu = 1, \dots, n$).

Stellt man die Idealsysteme durch Untermengen von H dar, so bedeutet die Homomorphie in den Sätzen 14 und 15, daß für jedes Idealsystem gilt:

$$(a_1, \dots, a_m)_s \leq (a_1, \dots, a_m) \leq (a_1, \dots, a_m)_v$$

oder in anderer Schreibweise, die auch für vollständige Idealsysteme gültig bleibt:

$$a_s \leq a' \leq a_v.$$

Allgemein sind zwei Idealsysteme, etwa das p - und q -Idealsystem genau dann homomorph, wenn in der Darstellung durch Untermengen für jedes a gilt:

$$a_p \subseteq a_q.$$

Die Einführung der Idealsysteme geschieht, um mit ihrer Hilfe die Einbettung einer Hauptgruppe G in eine reguläre Verbandsgruppe konstruktiv ohne Benutzung der Ordnungen von G zu ermöglichen.

Daß die Ideale zu dieser Konstruktion verwendbar sind, liegt im wesentlichen daran, daß jede Verbandsgruppe nach § 2 ein distributiver Verband ist. Es sei nämlich G eine beliebige halbgeordnete Gruppe. Dann enthält jede Oberverbandsgruppe V von G den Halbverband H der Elemente $\alpha \equiv a_1 \wedge \dots \wedge a_m$.

H ist ersichtlich ein Idealsystem von G . V enthält ferner die Elemente $\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n$. Wird nun vorausgesetzt, daß V ein minimaler distributiver Oberverband von G ist, so besteht V auch nur aus Elementen dieser Form $\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n$. Also ist V dann ein minimaler Oberhalbverband von H , d. h. V ist ein Idealsystem von H . Man hat nur zu beachten, daß V nicht aus den g. g. T. der Elemente von H besteht, sondern aus den k. g. V. Die Einbettung einer halbgeordneten Gruppe G in eine minimale Verbandsgruppe V läßt sich somit stets in zwei Schritten vollziehen: es ist zunächst ein Idealsystem H von G zu bilden, und dann ist V ein Idealsystem von H .

Man hat nur noch zu zeigen, daß die Elemente $\alpha, \vee \dots \vee \alpha_m$ schon eine Gruppe bilden. Mit $\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_m$ und $\beta_1 \vee \dots \vee \beta_n$ sind aber auch

$$(\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_m) (\beta_1 \vee \dots \vee \beta_n) \equiv \alpha_1 \beta_1 \vee \dots \vee \alpha_m \beta_n$$

und
$$(\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_m) \wedge (\beta_1 \vee \dots \vee \beta_n) \equiv (\alpha_1 \wedge \beta_1) \vee \dots \vee (\alpha_m \wedge \beta_n)$$

von dieser Form. Für $\alpha \equiv a_1 \wedge \dots \wedge a_m$ ist auch $\alpha^{-1} \equiv a_1^{-1} \vee \dots \vee a_m^{-1}$ von dieser Form, und daher für $A \equiv \alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n$ auch $A^{-1} \equiv \alpha_1^{-1} \wedge \dots \wedge \alpha_n^{-1}$.

Darüber hinaus läßt sich sogar jetzt beweisen, daß V das v -System von H ist ²⁶⁾.

Dies ist eine Folge von

Satz 16. Ist H eine halbgeordnete Halbgruppe und V ein Idealsystem von H , das eine Gruppe bildet, so ist V das v -System von H .

²⁶⁾ Für halbgeordnete Gruppen vereinfacht sich die Definition des v -Systems. Es gilt $a \in (a_1, \dots, a_m)_v$ genau dann, wenn für jedes x, y, z gilt:

$$x \leq y a_1 z, \dots, x \leq y a_m z \Rightarrow x \leq y a z.$$

Diese Bedingung ist aber in halbgeordneten Gruppen gleichwertig mit

$$x \leq a_1, \dots, x \leq a_m \Rightarrow x \leq a.$$

Also wird $a_v = \bigcap_{a \subseteq (x)} (x)$. Diese Definition stimmt mit der Definition von ARTIN

und v. d. WAERDEN überein. Vgl. ²⁾.

Beweis. Es sei ein Idealsystem gegeben, das eine Gruppe bildet. Dann folgt aus $a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq_v a$ für jedes $x \in H$

$$1 \leq x a_1, \dots, 1 \leq x a_m \Rightarrow 1 \leq x a.$$

Das gegebene Idealsystem enthält Ideale α und β mit $\alpha a \equiv 1$ und $\beta(a_1 \wedge \dots \wedge a_m) \equiv 1$.

Es gilt dann $\beta \leq x \Rightarrow 1 \leq x(a_1 \wedge \dots \wedge a_m)$

$$\beta \leq x \Rightarrow 1 \leq x a_\mu \quad (\mu = 1, \dots, m)$$

$$\beta \leq x \Rightarrow 1 \leq x a$$

also $\beta \leq x \Rightarrow \alpha \leq x$.

Hieraus folgt aber $\alpha \leq \beta$

und somit $a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq a$.

Also gilt

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq_v a \Rightarrow a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq a.$$

Die umgekehrte Formel

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq a \Rightarrow a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq_v a$$

folgt aus Satz 15, womit

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq_v a \Leftrightarrow a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq a$$

bewiesen ist.

In der Darstellung durch Untermengen schreibt sich die letzte Formel:

$$a' = a_v.$$

Mit Satz 16 ergibt sich jetzt, daß jede minimale Oberverbandsgruppe einer halbgeordneten Gruppe in zwei Schritten zu konstruieren ist:

- 1) es ist ein gewisses Idealsystem H zu bilden,
- 2) es ist das v -System von H zu bilden.

Wir nennen daher jede minimale Oberverbandsgruppe kurz eine Idealgruppe.

§ 5.

r -Gruppen.

Der Inhalt von § 3 und § 4 dient im Wesentlichen zur Untersuchung der Hauptgruppen. Wir wissen jetzt, daß eine halbgeordnete Gruppe G genau dann Hauptgruppe ist, wenn es eine reguläre Oberverbandsgruppe gibt. Gibt es eine solche Oberverbandsgruppe, so gibt es stets auch eine minimale, reguläre Oberverbandsgruppe, also eine reguläre Idealgruppe. Jede Idealgruppe läßt sich darstellen als v -Idealsystem eines Idealsystems von G . Ist eine reguläre Oberverbandsgruppe V

von G bekannt, so liefert jede vollständige, prime, invariante Unterhalbgruppe der zugehörigen Halbgruppe von V eine Ordnung von G . Ehe wir die Untersuchung fortsetzen, fragen wir uns jetzt, was diese Ergebnisse für die Arithmetik der kommutativen Integritätsbereiche bedeuten. Zunächst lassen sie sich hierauf noch nicht anwenden, denn für den Quotientenkörper K eines Integritätsbereiches interessieren ja gar nicht die sämtlichen Ordnungen von K , sondern es interessieren nur die Bewertungen von K .

Die Bewertungen eines Körpers K lassen sich nun kennzeichnen als diejenigen Ordnungen von K , die durch zulässige Ordnungen des DEDEKINDSchen Idealsystems von K induziert werden²⁾.

Damit unsere Untersuchung der halbgeordneten Gruppen auch die speziellen Fragen der Arithmetik der kommutativen Integritätsbereiche umfaßt, legen wir daher von jetzt ab eine halbgeordnete Gruppe zugrunde, zu der von vornherein ein festes Idealsystem gegeben ist. Ist dies das System der r -Ideale, so nennen wir die halbgeordnete Gruppe kurz eine r -Gruppe.

In einer r -Gruppe erklären wir nur diejenigen Halbordnungen als r -zulässig, die durch eine zulässige Ordnung des r -Idealsystems induziert werden.

Die r -zulässigen Halbordnungen lassen sich unabhängig von dem Begriff der zulässigen Halbordnung eines Halbverbandes kennzeichnen. Ist nämlich eine beliebige halbgeordnete Gruppe G gegeben, und ist H ein Idealsystem von G , so gilt

Satz 17. Eine Halbordnung $\leq$ von G wird genau dann durch eine zulässige Halbordnung von H induziert, wenn

$$1) \ a \leq b \Rightarrow a \dot{\leq} b$$

erfüllt ist und wenn aus $a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq a$ in H für jedes $x \in G$ folgt

$$2) \ x \dot{\leq} a_1, \dots, x \dot{\leq} a_m \Rightarrow x \dot{\leq} a.$$

Beweis. Ist $\dot{\leq}$ eine zulässige Halbordnung von H , so gilt 1) und

$$\begin{aligned} a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq a &\Rightarrow a_1 \wedge \dots \wedge a_m \dot{\leq} a \\ x \dot{\leq} a_1, \dots, x \dot{\leq} a_m &\Rightarrow x \dot{\leq} a_1 \wedge \dots \wedge a_m. \end{aligned}$$

Also ist auch 2) für die in G induzierte Halbordnung erfüllt. Ist umgekehrt $\dot{\leq}$ eine Halbordnung von G , die 1) und 2) erfüllt, so ist das von G bezügl. $\dot{\leq}$ gebildete v -Idealsystem²⁷⁾ ein homomorphes Bild von H , definiert also eine zulässige Halbordnung von H , die $\dot{\leq}$ induziert.

²⁷⁾ Es gilt $a_1 \wedge \dots \wedge a_m \dot{\leq} a$ genau dann, wenn für jedes $x \in G$

$$x \dot{\leq} a_1, \dots, x \dot{\leq} a_m \Rightarrow x \dot{\leq} a$$

Für die Ordnungen von G gilt darüber hinaus

Satz 18. Die zulässigen Ordnungen von H entsprechen eindeutig den Ordnungen von G , die 1) und 2) erfüllen.

Beweis. Für jede zulässige Ordnung $\leq$ gilt:

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq b_1 \wedge \dots \wedge b_n \Leftrightarrow \min a_\mu \leq \min b_\nu.$$

Zwei Ordnungen von H , die dieselbe Ordnung von G induzieren, sind also identisch. Ferner wird jede Ordnung $\leq$, die 1) und 2) erfüllt, durch eine Ordnung von H induziert, da das von G bezügl. $\leq$ gebildete v -Idealsystem eine geordnete Menge ist.

Ist G eine r -Gruppe und $\dot{g}$ die zugehörige Halbgruppe, so entsprechen die r -zulässigen Halbordnungen bzw. Ordnungen von G den invarianten Unterhalbgruppen bzw. den linearen, invarianten Unterhalbgruppen $\dot{g}$ die

$$1) \dot{g} \leq \dot{g}$$

erfüllen, und für die aus $a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq_v a$ folgt:

$$2) a_1 \in \dot{g}, \dots, a_m \in \dot{g} \Rightarrow a \in \dot{g}.$$

Statt 2) läßt sich auch schreiben:

$$a_1 \in \dot{g}, \dots, a_m \in \dot{g} \Rightarrow (a_1, \dots, a_m)_r \leq \dot{g}.$$

Wir nennen die invarianten Unterhalbgruppen von G , die 1) und 2) erfüllen, die r -zulässigen Halbgruppen von G .

Eine r -Gruppe G heißt r -Hauptgruppe, wenn die Halbordnung von G nicht nur Konjunktion von Ordnungen von G ist, sondern sogar Konjunktion von r -zulässigen Ordnungen ist. Das ist also genau dann der Fall, wenn die zugehörige Halbgruppe Durchschnitt von linearen r -zulässigen Halbgruppen ist.

Eine r -Hauptgruppe G läßt sich demnach in eine Vektorgruppe einbetten, die das direkte Produkt von geordneten Gruppen ist, deren Ordnungen r -zulässige Ordnungen von G induzieren. Wir nennen jede solche Obervektorgruppe „ r -zulässig“.

Da jede Vektorgruppe eine Verbandsgruppe ist, enthält jede Obervektorgruppe von G eine minimale Oberverbandsgruppe von G , also eine Idealgruppe.

Jede Idealgruppe von G , die in einer r -zulässigen Obervektorgruppe von G enthalten ist, nennen wir ebenfalls „ r -zulässig“.

Satz 19. Ist G eine r -Hauptgruppe, so ist eine Idealgruppe V von G genau dann r -zulässig, wenn V regulär ist und jede zulässige Ordnung von V eine r -zulässige Ordnung von G induziert.

Beweis. Jede reguläre Idealgruppe, deren zulässige Ordnungen r -zulässige Ordnungen von G induzieren, läßt sich nach Satz 13 in eine r -zulässige Vektorgruppe einbetten.

Umgekehrt ist jede Idealgruppe V , die in eine r -zulässige Vektorgruppe einbettbar ist, zunächst jedenfalls regulär. Ferner gilt für jede zulässige Halbordnung $\leq$ von V und für jedes $a_1, \dots, a_m, a \in G$ mit $a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq a$

$$x \leq a_1, \dots, x \leq a_m \Rightarrow x \leq a.$$

Die Halbordnung $\leq$ von V ist Konjunktion von zulässigen Ordnungen $\leq_r$, für die gilt

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq_r a \Rightarrow a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq a,$$

da diese Ordnungen r -zulässige Ordnungen von G induzieren. Also gilt für jedes $a_1, \dots, a_m, a \in G$ mit $a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq_r a$

$$x \leq a_1, \dots, x \leq a_m \Rightarrow x \leq a,$$

d. h. $\leq$ induziert eine r -zulässige Halbordnung von G .

Nach dem Beweis von Satz 19 induziert nicht nur jede zulässige Ordnung einer r -zulässigen Idealgruppe eine r -zulässige Ordnung von G , sondern allgemeiner jede zulässige Halbordnung eine r -zulässige Halbordnung.

Für die zulässigen Ordnungen gilt genauer

Satz 20. Die zulässigen Ordnungen einer r -zulässigen Idealgruppe V entsprechen eineindeutig den induzierten r -zulässigen Ordnungen von G .

Beweis. Jedes Element von V läßt sich in der Form $\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n$ schreiben, wobei α_ν Elemente der Form $a_1 \wedge \dots \wedge a_m$ sind mit $a_\mu \in G$. Für jede zulässige Ordnung $\leq$ von V gilt nun

$$\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n \equiv \max \alpha_\nu^{28})$$

und

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_m \equiv \min a_\mu \in G.$$

Also gibt es zu jedem $A \in V$ ein $a \in G$ mit $A \equiv a$, d. h. die Ordnung $\leq$ von V ist eindeutig bestimmt durch die in G induzierte Ordnung.

Wegen Satz 10 entsprechen also die primen, vollständigen, invarianten Unterhalbgruppen der zugehörigen Halbgruppe einer r -zulässigen Idealgruppe V eineindeutig den r -zulässigen Ordnungen, die durch zulässige Ordnungen von V induziert werden.

²⁸⁾ Nach der Definition der Zulässigkeit gilt jedenfalls

$$\alpha_1^{-1} \wedge \dots \wedge \alpha_n^{-1} \equiv \min \alpha_\nu^{-1},$$

also

$$(\alpha_1^{-1} \wedge \dots \wedge \alpha_n^{-1})^{-1} \equiv (\min \alpha_\nu^{-1})^{-1}$$

d. h.

$$\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n \equiv \max \alpha_\nu.$$

Es ist daher wichtig, daß es eine r -zulässige Idealgruppe gibt, deren zulässige Ordnungen die sämtlichen r -zulässigen Ordnungen von G induzieren. Man hat nur zu bedenken, daß die Halbordnung einer r -Hauptgruppe die Konjunktion der sämtlichen r -zulässigen Ordnungen ist. Die Gruppe der Vektoren $\{\dots, a_r \dots\}$, die zu jeder r -zulässigen Ordnung $\leq_r$ genau ein Element $a_r \in G$ enthalten, ist also eine r -zulässige Obervektorgruppe und enthält eine r -zulässige Idealgruppe, deren zulässige Ordnungen eineindeutig den sämtlichen r -zulässigen Ordnungen von G entsprechen. Wir nennen diese r -zulässige Idealgruppe die ausgezeichnete Idealgruppe und bezeichnen sie mit $V_a^{(r)}$.

Satz 21. Jede r -zulässige Idealgruppe V ist ein homomorphes Bild von $V_a^{(r)}$.

Beweis. Die Behauptung des Satzes läßt sich einfacher auf folgende Weise ausdrücken:

Eine Relation

$$\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_m \leq \beta_1 \vee \dots \vee \beta_m$$

mit $\alpha_\mu \equiv a_{\mu 1} \wedge \dots \wedge a_{\mu m_\mu}$ und $\beta_\nu \equiv b_{\nu 1} \wedge \dots \wedge b_{\nu n_\nu}$, mit $a_{\mu\nu}, b_{\mu\nu} \in G$ gilt stets dann in V , wenn sie in $V_a^{(r)}$ gilt. Da eine solche Relation in $V_a^{(r)}$ gilt, wenn sie für alle r -zulässigen Ordnungen von G gilt, in V dagegen, wenn sie für gewisse r -zulässige Ordnungen von G gilt, so ist diese Behauptung aber selbstverständlich.

Wegen Satz 9 entsprechen also die r -zulässigen Idealgruppen eineindeutig gewissen vollständigen, invarianten Unterhalbgruppen der zugehörigen Halbgruppe von $V_a^{(r)}$.

Satz 22. Die r -zulässigen Idealgruppen entsprechen eineindeutig den regulären, vollständigen invarianten Unterhalbgruppen S der zugehörigen Halbgruppe von $V_a^{(r)}$, die mit G nur die Einheitengruppe E von G gemeinsam haben, also die Bedingung

$$S \cap G = E$$

erfüllen.

Beweis. Ist S eine reguläre, vollständige, invariante Unterhalbgruppe der zugehörigen Halbgruppe von $V_a^{(r)}$ und gilt $S \cap G = E$, so definiert S eine Halbordnung $\leq$ von $V_a^{(r)}$, so daß $V_a^{(r)}$ bezügl. $\leq$ eine reguläre Verbandsgruppe V ist und für jedes $a, b \in G$ gilt

$$a \leq b \Leftrightarrow a \dot{\leq} b.$$

Es gilt nämlich zunächst $a \leq b \Rightarrow a \dot{\leq} b$, weil $\dot{\leq}$ eine zulässige Halbordnung ist. Gilt $a \dot{\leq} b$, so folgt $1 \vee b^{-1}a \in S$, also $1 \vee b^{-1}a \equiv 1$, woraus sich $b^{-1}a \leq 1$ und $a \leq b$ ergibt. $V_a^{(r)}$ ist also bezügl. $\dot{\leq}$ eine reguläre Verbandsgruppe V , die G isomorph enthält, d. h. eine reguläre Idealgruppe von G . Daß V r -zulässig ist, ergibt sich sofort daraus, daß jede zulässige Ordnung von V einem Homomorphismus von V entspricht. Da nämlich V homomorph zu $V_a^{(r)}$ ist, definiert jeder Homo-

morphismus von V auch einen Homomorphismus von V_a^r . Jede zulässige Ordnung von V definiert daher eine zulässige Ordnung von V_a^r — und indiziert in G also eine r -zulässige Ordnung.

Die Umkehrung ist trivial, weil jedes S , das einen Homomorphismus von V_a^r auf eine Idealgruppe V definiert, keine Nichteinheit c von G enthalten darf. Es würde dann nämlich c in V eine Einheit werden, im Widerspruch dazu, daß V Idealgruppe ist, also G isomorph enthält.

Wir wollen jetzt noch berücksichtigen, daß nach § 4 jede Idealgruppe ein Idealsystem enthält und schon eindeutig durch dieses Idealsystem bestimmt ist. Wir nennen die Idealsysteme, die in einer r -zulässigen Idealgruppe enthalten sind, r -brauchbar. Speziell dasjenige r -brauchbare Idealsystem, das in der ausgezeichneten r -zulässigen Idealgruppe V_a^r enthalten ist, nennen wir das r_a -System²⁹⁾. Über dieses Idealsystem gilt

Satz 23. Jedes r -brauchbare Idealsystem ist zum r_a -System und erst recht zum r -System homomorph.

Beweis. Daß jedes r -brauchbare Idealsystem homomorph zum r_a -System ist, ergibt sich aus Satz 21.

Weil ferner jede zulässige Ordnung $\leq$ einer r -zulässigen Idealgruppe V für jedes $a_1, \dots, a_m, a \in G$ die Bedingung

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq_r a \Rightarrow a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq_a a$$

erfüllt, gilt auch für das in V enthaltene Idealsystem

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq_i a \Rightarrow a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq a.$$

Aus dem Beweis von Satz 19 ergibt sich jetzt sofort wegen Satz 16, daß sich die r -brauchbaren Idealsysteme dadurch kennzeichnen lassen, daß sie homomorph zum r -Idealsystem sind, und daß ihre v -Ideale eine reguläre Verbandsgruppe bilden³⁰⁾.

§ 6.

Die r -Abschließung.

Wir wollen in diesem § nachweisen, daß sich das ausgezeichnete r -brauchbare Idealsystem, das r_a -System, einer r -Hauptgruppe unabhängig von den Begriffen der vorhergehenden §§ kennzeichnen läßt.

²⁹⁾ Das r_a -System stimmt für kommutative Gruppen mit dem in ²⁾ definierten r_a -System überein, wie in § 6 bewiesen wird.

³⁰⁾ Statt Satz 19 kann man jetzt auch beweisen:

Eine Idealgruppe V von G ist genau dann r -zulässig, wenn V regulär ist und ein Idealsystem von G enthält, das zum r -System homomorph ist.

Es sei G eine beliebige r -Gruppe, $\dot{g}$ die zugehörige Halbgruppe, $\dot{g}$ eine r -zulässige Halbgruppe, $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ eine endliche Untermenge von G und $a \in G$.

Wir bezeichnen das r -Ideal $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)_r$ mit α_r .

Wir definieren das Produkt $\alpha_r \cdot \dot{g}$ als die kleinste Untermenge von G , die sämtliche Elemente $a\dot{g}$ mit $a \in \alpha_r$ und $\dot{g} \in \dot{g}$ enthält und außerdem für jedes $x, \dots, x_n \in G$ die Bedingung

$$x_1 \in \alpha_r \cdot \dot{g}, \dots, x_n \in \alpha_r \cdot \dot{g} \Rightarrow (x_1, \dots, x_n)_r \leq \alpha_r \cdot \dot{g}$$

erfüllt.

Wir nennen ein Element a von G r -abhängig von α_r in $\dot{g}$, wenn für jede lineare, r -zulässige Halbgruppe $\dot{h}$ gilt:

$$\dot{g} \leq \dot{h} \Rightarrow a \in \alpha_r \cdot \dot{h}.$$

Die Gültigkeit von $a \in \alpha_r \cdot \dot{h}$ besagt, daß für die $\dot{h}$ entsprechende Ordnung gilt: $\min a_\mu \leq a$.

Ist G eine r -Hauptgruppe, so ist also a genau dann r -abhängig von α_r (in $\dot{g}$)³¹⁾, wenn für jede r -zulässige Ordnung $\leq$ von G gilt: $\min a_\mu \leq a$. Genau dann gilt aber in dem r_α -Idealsystem $a_1 \wedge \dots \wedge a_m \leq a$ oder also $a \in (\alpha_1, \dots, \alpha_m)_{r_\alpha}$.

Wir untersuchen jetzt die r -Abhängigkeit für beliebige r -Gruppen genauer.

Zunächst folgt aus $a \in \alpha_r \cdot \dot{g}$ stets, daß a r -abhängig ist von α_r in $\dot{g}$. Zur Formulierung einer weiteren Eigenschaft der r -Abhängigkeit bezeichnen wir für jedes $x \in G$ mit $\dot{g}(x)_r$ den Durchschnitt aller r -zulässigen Halbgruppen, die $\dot{g}$ umfassen und außerdem x enthalten. $\dot{g}(x)_r$ ist wieder eine r -zulässige Halbgruppe, die „ r -Erweiterung“ von $\dot{g}$ mit x .

Ist nun a r -abhängig von α_r in $\dot{g}(x)_r$ und $\dot{g}(x^{-1})_r$, so ist a auch r -abhängig von α_r in $\dot{g}$. Denn jede lineare r -zulässige Halbgruppe $\dot{h}$ enthält stets x oder x^{-1} . Aus $\dot{g} < \dot{h}$ folgt also $\dot{g}(x)_r \leq \dot{h}$ oder $\dot{g}(x^{-1})_r \leq \dot{h}$ woraus die Behauptung folgt. Wir zeigen jetzt umgekehrt, daß diese Eigenschaft der r -Abhängigkeit ausreicht, um sie zu kennzeichnen.

Wir definieren dazu eine Relation α_r zwischen den Elementen a und den Produkten $\alpha_r \cdot \dot{g}$.

Wir setzen $a \alpha_r \alpha_r \cdot \dot{g}$, wenn es Elemente $x_1, \dots, x_n$ von G gibt mit $a \in \alpha_r \cdot \dot{g}(x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1})$ für jede der 2^n möglichen Vorzeichenkombinationen.

Satz 24. a ist genau dann r -abhängig von α_r in $\dot{g}$, wenn $a \alpha_r \alpha_r \cdot \dot{g}$ gilt³²⁾.

³¹⁾ Gilt die Abhängigkeit in der zugehörigen Halbgruppe $\dot{g}$, so unterlassen wir die Angabe von $\dot{g}$.

³²⁾ Vgl. hierzu den Beweis in der Einleitung.

Beweis. Wir haben ersichtlich nur noch zu beweisen, daß a nicht r -abhängig ist von a_r in $\dot{g}$, wenn $a\bar{a}_ra_r.\dot{g}$ nicht gilt. Wir schreiben dann $a\bar{a}_ra_r.\dot{g}$.

Wir müssen zeigen, daß es mindestens eine lineare r -zulässige Halbgruppe $\dot{h}$ gibt, die $\dot{g}$ umfaßt und für die $a\bar{a}_ra_r.\dot{h}$ gilt.

Wir werden durch Wohlordnung zeigen, daß es jedenfalls eine maximale r -zulässige Halbgruppe $\dot{h}$ gibt mit $a\bar{a}_ra_r.\dot{h}$, d. h. für jede r -zulässige Halbgruppe $\dot{h}'$ mit $\dot{h} \subset \dot{h}'$ gilt $a\bar{a}_ra_r.\dot{h}'$. Ist das bewiesen, so ist $\dot{h}$ linear, denn es kann für kein $x \in G$ gelten: $x \in \dot{h}$ und $x^{-1} \notin \dot{h}$, da hieraus wegen $\dot{h} \subset \dot{h}(x)_r$ und $\dot{h} \subset \dot{h}(x^{-1})_r$ folgen würde:

$$a\bar{a}_ra_r.\dot{h}(x)_r, \quad a\bar{a}_ra_r.\dot{h}(x^{-1})_r,$$

also $a\bar{a}_ra_r.\dot{h}$.

Zum Beweis der Existenz einer maximalen r -zulässigen Halbgruppe mit $a\bar{a}_ra_r.\dot{h}$ hat man nur zu zeigen, daß für jede wohlgeordnete Folge

$$g_0 \leq \dots \leq g_\tau \leq \dots$$

von r -zulässigen Halbgruppen g_τ mit $a\bar{a}_ra_r.g_\tau$ auch die Vereinigung $g' = \bigcup g_\tau$ eine r -zulässige Halbgruppe mit $a\bar{a}_ra_r.g'$ ist. g' ist eine r -zulässige Halbgruppe. Denn, gilt $x_1 \wedge \dots \wedge x_n \leq_v x$ und $x_v \in g'$, so folgt, daß es ein τ gibt mit $x_v \in g_\tau$. Also gilt auch $x \in g_\tau$ und $x \in g'$. Ebenso leicht folgt: $a\bar{a}_ra_r.g'$. Aus $a \in a_r.g'(x_1^{+1}, \dots, x_n^{+1})_r$ würde nämlich für mindestens ein τ auch $a \in a_r.g_\tau(x_1^{+1}, \dots, x_n^{+1})_r$, also $a\bar{a}_ra_r.g_\tau$ folgen. Damit ist Satz 24 bewiesen.

Die Bedeutung dieses Satzes liegt darin, daß es jetzt möglich ist, für jede r -Hauptgruppe eine direkte Konstruktion des r_a -Idealsystems anzugeben.

Dieses Idealsystem läßt sich z. B. durch Untermengen $(a_1, \dots, a_m)_{ra}$ definieren, indem man festsetzt, daß

$$a \in (a_1, \dots, a_m)_{ra}$$

genau dann gelten soll, wenn für $a = \{a_1, \dots, a_m\}$ gilt

$$a\bar{a}_ra_r.g^{33}).$$

Auf diese Weise kann man auch ein vollständiges r_a -Idealsystem definieren³⁴⁾.

Führt man dieselbe Konstruktion nicht nur für r -Hauptgruppen, sondern auch für beliebige r -Gruppen durch, so bilden die Untermengen $(a_1, \dots, a_m)_{ra}$ natürlich kein Idealsystem mehr. Ein Idealsystem

³³⁾ g bezeichnet wieder die zugehörige Halbgruppe.

³⁴⁾ Auch für den Beweis von Satz 24 braucht das Ideal a_r keine endliche Basis zu haben. Es ist nur notwendig, daß das r -System „endlichartig“ ist. Vgl. 2).

bilden sie ja nur dann, wenn die Mengen $(a)_{ra}$ genau die Hauptideale sind, also wenn $(1)_{ra} = \mathfrak{g}$ gilt. Gilt $a\alpha_r(1) \cdot \dot{\mathfrak{g}}$, so nennen wir a r -abhängig von $\dot{\mathfrak{g}}$, da $(1) \cdot \dot{\mathfrak{g}} = \dot{\mathfrak{g}}$ ist.

Liegt jedes von $\dot{\mathfrak{g}}$ r -abhängige Element in $\dot{\mathfrak{g}}$, so nennen wir $\dot{\mathfrak{g}}$ r -abgeschlossen.

Aus Satz 24 folgt jetzt

Satz 25. Eine r -zulässige Halbgruppe $\mathfrak{g}$ ist genau dann r -abgeschlossen, wenn $\dot{\mathfrak{g}}$ Durchschnitt von linearen r -zulässigen Halbgruppen ist.

Satz 26. Eine r -Gruppe ist genau dann r -Hauptgruppe, wenn die zugehörige Halbgruppe r -abgeschlossen ist.

Ist G keine r -Hauptgruppe, so bilden die von $\mathfrak{g}$ r -abhängigen Elemente eine r -zulässige Halbgruppe $\dot{\mathfrak{g}}$. ($\dot{\mathfrak{g}}$ ist nämlich der Durchschnitt aller linearen r -zulässigen Halbgruppen von G). Wir nennen $\dot{\mathfrak{g}}$ die r -abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{g}$.

Wir zeigen zum Schluß, daß für kommutative r -Gruppen unser Begriff der r -Abhängigkeit mit dem dort üblichen Begriff zusammenfällt.

Satz 27. Ist G eine kommutative Gruppe, $a \in G$, α_r ein r -Ideal und $\dot{\mathfrak{g}}$ eine r -zulässige Halbgruppe, so gilt genau dann $a\alpha_r \cdot \dot{\mathfrak{g}}$, wenn es ein r -Ideal $c_r = (c_1, \dots, c_m)_r$ gibt mit $a c_r \leq \alpha_r c_r \cdot \dot{\mathfrak{g}}$ ³⁵⁾.

Beweis. Wir beweisen zunächst durch Induktion nach n , daß aus $a \in \alpha_r \cdot \dot{\mathfrak{g}}(x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1})_r$ die Existenz eines Ideals c_r folgt mit $a c_r \leq \alpha_r c_r \cdot \dot{\mathfrak{g}}$. Dies ist für $n = 0$ trivial. Setzen wir es jetzt für n voraus, so folgt aus $a \in \alpha_r \cdot \dot{\mathfrak{g}}(x^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1})_r$ die Existenz von r -Idealen c'_r und c''_r mit

$$a c'_r \leq \alpha_r c'_r \cdot \dot{\mathfrak{g}}(x)_r \quad \text{und} \quad a c''_r \leq \alpha_r c''_r \cdot \dot{\mathfrak{g}}(x^{-1})_r.$$

Hieraus folgt für $c_r = c'_r c''_r$

$$a c_r \leq \alpha_r c_r \cdot \dot{\mathfrak{g}}(x)_r \quad \text{und} \quad a c_r \leq \alpha_r c_r \cdot \dot{\mathfrak{g}}(x^{-1})_r.$$

Da $\dot{\mathfrak{g}}(x)_r$ die Vereinigung der Glieder der Folge

$$\dot{\mathfrak{g}} \leq (1, x)_r \cdot \dot{\mathfrak{g}} \leq (1, x, x^2)_r \cdot \dot{\mathfrak{g}} \leq \dots$$

ist, folgt jetzt für geeignete natürliche Zahlen n' und n''

$$a c_r \leq \alpha_r c_r (1, x, \dots, x^{n'})_r \cdot \dot{\mathfrak{g}}$$

$$a c_r \leq \alpha_r c_r (1, x^{-1}, \dots, x^{-n''})_r \cdot \dot{\mathfrak{g}}.$$

Für $n = n' + n''$ gilt dann

$$a c_r (1, x, \dots, x^n)_r \leq \alpha_r c_r (1, x, \dots, x^n)_r \cdot \dot{\mathfrak{g}}.$$

Um die Umkehrung zu beweisen, daß aus $a c_r \leq \alpha_r c_r \cdot \dot{\mathfrak{g}}$ stets $a\alpha_r \cdot \dot{\mathfrak{g}}$ folgt, bemerken wir zunächst, daß es zu jedem Ideal $c_r = (c_1, \dots, c_m)_r$

³⁵⁾ Dieser Satz gilt nicht nur für Ideale α_r mit endlicher Basis.

ein Ideal $\mathfrak{d}_r$ gibt, so daß

$$c_r \mathfrak{d}_r = c_r^{(1)} c_r^{(2)} \dots c_r^{(n)}$$

gilt, wobei $c_r^{(n)} = (1, x_r)$ ist, $x_r \in G$ ³⁶⁾.

Es genügt daher, durch Induktion nach n zu beweisen, daß aus

$$a c_r^{(1)} \dots c_r^{(n)} \leq a_r c_r^{(1)} \dots c_r^{(n)}$$

stets $a a_r a_r \cdot \dot{g}$ folgt.

Die Behauptung ist für $n = 0$ trivial.

Wir setzen jetzt die Richtigkeit für n voraus.

Es gelte dann

$$a c_r^{(1)} \dots c_r^{(n+1)} \leq a_r c_r^{(1)} \dots c_r^{(n+1)} \cdot \dot{g}.$$

Wir setzen

$$c_r = c_r^{(1)} \dots c_r^{(n)}$$

$$c_r^{(n+1)} = (1, x_r).$$

Aus

$$a c_r (1, x_r) \leq a_r c_r (1, x_r) \cdot \dot{g}$$

folgt nun

$$a c_r \leq a_r c_r \cdot \dot{g}(x_r)$$

und wegen

$$a c_r (x^{-1}, 1) \leq a_r c_r (x^{-1}, 1) \cdot \dot{g}$$

auch

$$a c_r \leq a_r c_r \cdot \dot{g}(x^{-1}).$$

Hieraus folgt jetzt

$$a a_r a_r \cdot \dot{g}(x)_r \quad \text{und} \quad a a_r a_r \cdot \dot{g}(x^{-1})_r,$$

also

$$a a_r a_r \cdot \dot{g}.$$

³⁶⁾ Dieser Schluß stammt von DEDEKIND. Man beweist ihn durch Induktion nach m mit der folgenden Identität, die in beliebigen kommutativen „Halbverbandshalbgruppen“ gilt:

$$(a \wedge b \wedge c) (ab \wedge ac \wedge bc) \equiv (a \wedge b) (a \wedge c) (b \wedge c).$$

II. TEIL.

Die Ergebnisse von Teil I werden vorausgesetzt.

§ 1 geht zunächst auf die geordneten Gruppen ein, die für den nichtkommutativen Fall bisher kaum behandelt sind¹⁾. Es wird eine Möglichkeit angegeben, solche Gruppen aus einfacheren aufzubauen.

§ 2 beantwortet dann die Frage, wann eine beliebige Gruppe überhaupt geordnet werden kann. Dazu wird eine wesentliche Verschärfung von Satz 25 (Teil 1) benutzt.

¹⁾ Vgl. R. BAER, J. reine angew. Math. 160, 1929.

Durch Spezialisierung des Idealsystems auf das s -Idealsystem folgt aus dieser Verschärfung, daß sich eine Gruppe G genau dann ordnen läßt, wenn es keine von 1 s -abhängigen Elemente außer 1 gibt.

Ist G kommutativ, so besagt diese Bedingung, daß G keine Elemente endlicher Ordnung außer dem Einselement 1 haben darf. In § 3 wird nachgewiesen, daß dieses letzte Ergebnis auch aus einem allgemeineren Satz über kommutative Halbgruppen folgt, der sich ohne Voraussetzung des I. Teils beweisen läßt.

§ 1.

M sei eine beliebige Menge, $\leq$ eine Halbordnung von M . $a, b, \dots$ seien Elemente von M .

Während wir in Teil 1 außer Acht gelassen haben, ob die Halbordnung $\leq$ die Bedingung

$$a \equiv b \Rightarrow a = b$$

erfüllt oder nicht, nennen wir jetzt jede Halbordnung, die diese Bedingung erfüllt, streng.

Eine halbgeordnete Gruppe ist also genau dann streng halbgeordnet, wenn sie keine Einheiten außer dem Einselement 1 besitzt. Der Gegenstand dieser Arbeit sind die strengen Ordnungen von Gruppen.

Die einfachsten Beispiele für streng geordnete Gruppen sind die „reellen Gruppen“, d. h. die Untergruppen der additiven Gruppe R aller reellen Zahlen. Die reellen Gruppen sind bekanntlich dadurch gekennzeichnet, daß sie „archimedisch geordnet“²⁾ sind.

Um nichtkommutative, streng geordnete Gruppen zu erhalten, muß man also nichtarchimedisch geordnete Gruppen aufbauen. Wir geben hierzu die folgende Konstruktion an:

Es sei N eine beliebige, streng geordnete Gruppe. Ein Automorphismus σ von N heißt Ordnungsautomorphismus, wenn für jedes $a, b \in N$ mit den Bildern a^σ, b^σ gilt

$$a \leq b \Rightarrow a^\sigma \leq b^\sigma.$$

Die Ordnungsautomorphismen von N bilden eine Gruppe. Denn, sind σ und τ Ordnungsautomorphismen, so folgt aus $a \leq b$ zunächst $a^{\sigma^{-1}} \leq b^{\sigma^{-1}}$, da aus $a^{\sigma^{-1}} > b^{\sigma^{-1}}$ nämlich $a > b$ folgen würde. Aus $a^{\sigma^{-1}} \leq b^{\sigma^{-1}}$ folgt aber $a^{\sigma^{-1}\tau} \leq b^{\sigma^{-1}\tau}$, also ist $\sigma^{-1}\tau$ ebenfalls ein Ordnungsautomorphismus. Ist S eine weitere streng geordnete Gruppe und φ ein Homomorphismus von S in die Gruppe der Ordnungsautomorphismen von N , der das Element s von S auf $\sigma = \varphi s$ abbildet, so bilden wir auf folgende Weise eine Gruppe S_N^φ :

Die Elemente von S_N^φ seien die Paare s_a mit $s \in S$ und $a \in N$.

²⁾ Vgl. z. B. H. CARTAN. Bull. Sc. Math. II, Band 63, 1939.

Die Gruppenverknüpfung für zwei Elemente s_a und t_b definieren wir durch

$$s_a t_b = s t_a \tau_b,$$

wobei $\tau = \varphi t$ gesetzt ist.

Die Assoziativität folgt aus

$$r_a(s_b t_c) = r_a s t_b \tau_c = r s t_a \sigma \tau_b \tau_c$$

$$(r_a s_b) t_c = r s_a \sigma_b t_c = r s t_{(a \sigma_b) \tau_c} = r s t_a \sigma \tau_b \tau_c.$$

Zu jedem Element s_a gibt es ein inverses Element $(s_a)^{-1}$, denn

$$s_{a^{-\sigma}^{-1}} s_a = s^{-1} s_{a^{-\sigma^{-1}} \sigma_a} = s^{-1} s_{a^{-1} a} = 1_1.$$

Zur Definition einer Ordnung von $S_N^{\mathcal{G}}$ setzen wir fest, daß genau dann $s_a \leq t_b$ gelten soll, wenn $s \leq t$ gilt und $s < t$ oder $a \leq b$. Durch diese Festsetzung wird die Gruppe $S_N^{\mathcal{G}}$ zu einer streng geordneten Gruppe. Die Relation $\leq$ ist eine strenge Ordnung, da es sich um die lexikographische Ordnung der Paare $s_a, t_b \dots$ handelt. Es bleibt nur die Gültigkeit der Monotonie nachzuweisen:

$$s_a \leq t_b, s'_{a'} \leq t'_{b'} \Rightarrow s_a s'_{a'} \leq t_b t'_{b'}.$$

Aus $s_a \leq t_b$ und $s'_{a'} \leq t'_{b'}$ folgt $s \leq t$ und $s' \leq t'$, also $ss' \leq tt'$. Ist nun $ss' = tt'$, so folgt wegen $s^{-1} \geq t^{-1}$ sofort $s' = t'$, also $a' \leq b'$. Ebenso folgt $s = t$ und $a \leq b$. Wegen $s' = t'$ ist

$$\sigma' = \varphi s' = \varphi t' = \tau',$$

also $a^{\sigma'} \leq b^{\tau'}$. Zusammen ergibt sich $a^{\sigma'} a' \leq b^{\tau'} b'$, d. h. $ss'_{a^{\sigma'} a'} \leq tt'_{b^{\tau'} b'}$.

Nimmt man für N die volle reelle Gruppe R und für S die dazu isomorphe multiplikative Gruppe der positiven reellen Zahlen, so entsteht eine Gruppe R_R , die aus den Paaren s_a besteht (s positiv reell, a beliebig reell) und die Multiplikationsvorschrift

$$s_a t_b = s t_{at+b}$$

hat. Diese Gruppe R_R ist isomorph zur Gruppe der affinen Transformationen einer reellen Variablen

$$x' = sx + a \quad (s > 0).$$

Denn, ist

$$x'' = tx' + b \quad (t > 0),$$

so wird

$$x'' = stx + at + b \quad (st > 0).$$

Da sich die Gruppe R_R wieder homomorph in R abbilden läßt, kann eine Gruppe $(R_R)_R$ konstruiert werden. Setzt man das Verfahren fort, so erhält man stets neue streng geordnete Gruppen.

§ 2.

Wir wenden uns jetzt zu der Frage, wann eine beliebige Gruppe G geordnet werden kann. G soll natürlich streng geordnet werden, da sonst die Frage trivial ist.

Zur Beantwortung benutzen wir Satz 25 aus Teil 1. Dieser sagt aus, daß jede r -abgeschlossene, r -zulässige Halbgruppe einer r -Gruppe Durchschnitt von linearen, r -zulässigen Halbgruppen ist.

Wir leiten zunächst eine wesentliche Verschärfung dieses Satzes her.

Es sei G eine r -Gruppe. Die zugehörige Halbgruppe g sei r -abgeschlossen. G ist dann also eine r -Hauptgruppe und g ist Durchschnitt von linearen, r -zulässigen Halbgruppen. Wir nennen eine lineare r -zulässige Halbgruppe $\dot{g}$ minimal, wenn es keine lineare r -zulässige Halbgruppe $\dot{h}$ gibt mit

$$\dot{h} \subset \dot{g}.$$

Satz 1. Jede lineare r -zulässige Halbgruppe umfaßt mindestens eine minimale, lineare r -zulässige Halbgruppe $\dot{h}$.

Beweis. Die Existenz von $\dot{h}$ ergibt sich wieder durch einen Wohlordnungsschluß. Es braucht nur gezeigt zu werden, daß für jede wohlgeordnete Folge

$$\dot{h}_0 \supseteq \dot{h}_1 \supseteq \dots \supseteq \dot{h}_r \supseteq \dots$$

von linearen, r -zulässigen Halbgruppen $\dot{h}_r$ auch der Durchschnitt $\dot{h}' = \bigcap_r \dot{h}_r$ aller $\dot{h}_r$ eine lineare, r -zulässige Halbgruppe ist³⁾. Daß $\dot{h}'$ eine r -zulässige Halbgruppe ist, ist trivial. Aber $\dot{h}'$ ist auch linear, denn, gilt für ein beliebiges $a \in G$: $a \bar{\in} \dot{h}'$, so gibt es ein τ , für das $a \bar{\in} \dot{h}_\tau$ gilt, also $a^{-1} \in \dot{h}_\tau$. Hieraus folgt für jedes b : $a^{-1} \in \dot{h}_b$. Denn, ist, $\sigma \leq \tau$, so ist $\dot{h}_\sigma \supset \dot{h}_\tau$, also $a^{-1} \in \dot{h}_\sigma$. Ist $\sigma \geq \tau$, so ist $\dot{h}_\sigma \subseteq \dot{h}_\tau$, also $a \bar{\in} \dot{h}_\sigma$, d. h. $a^{-1} \in \dot{h}_\sigma$.

Wegen Satz 1 folgt jetzt sofort aus Satz 25 (Teil 1)

Satz 2. Die zugehörige Halbgruppe g ist Durchschnitt von minimalen, linearen, r -zulässigen Halbgruppen.

Wir benutzen jetzt dieses Ergebnis speziell für das s -Idealsystem. Nach Satz 14 (Teil 1) läßt sich jede beliebige, halbgeordnete Gruppe stets als eine s -Gruppe auffassen. Jede invariante Unterhalbgruppe $\dot{g}$ von G , die die zugehörige Halbgruppe g umfaßt, ist s -zulässig. Die minimalen, linearen, s -zulässigen Halbgruppen sind einfach die minimalen, linearen, invarianten Unterhalbgruppen, die g umfassen. Wir beweisen hierüber

Satz 3. Eine lineare, invariante Unterhalbgruppe $\dot{g}$, die g umfaßt, ist genau dann minimal, wenn jede Einheit von $\dot{g}$ auch Einheit von g ist, wenn also für die Einheitengruppen $\dot{E}$ und E gilt: $\dot{E} = E$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß eine lineare, s -zulässige Halbgruppe $\dot{g}$, für die $\dot{E} > E$ gilt, nicht minimal ist, sondern echte Ober-

³⁾ Vgl. z. B. N. BOURBAKI, Actual. Scient. et. Ind., Nr. 846.

menge einer linearen, s -zulässigen Halbgruppe ist. Aus $\dot{E} > E$ folgt $\dot{E} \subseteq \dot{g}$, also die Existenz eines Elementes c von $\dot{E}$, so daß $c \bar{\in} g$. Da g s -abgeschlossen ist, gibt es nach Satz 25 (Teil 1) eine lineare, s -zulässige Halbgruppe $\mathfrak{h}$, so daß $c \bar{\in} \mathfrak{h}$ gilt. Wir setzen

$$\mathfrak{h}' = [\mathfrak{h} \cap \dot{E}] \cup [\dot{g} - \dot{E}]^4).$$

Dann gilt $\mathfrak{h}' < \dot{g}$. Wir behaupten außerdem, daß $\mathfrak{h}'$ eine lineare s -zulässige Halbgruppe ist.

$$1) \ g \subseteq \mathfrak{h}'.$$

Dieses folgt aus:

$$\begin{aligned} g \cap \mathfrak{h}' &= [g \cap \dot{E}] \cup [g \cap (\dot{g} - \dot{E})] \\ &= g \cap [\dot{E} \cup (\dot{g} - \dot{E})] \\ &= g \cap \dot{g} = g. \end{aligned}$$

Für jedes $a, b \in G$ gilt

$$2) \ a \in \mathfrak{h}', \ b \in \mathfrak{h}' \Rightarrow ab \in \mathfrak{h}'.$$

Aus $a \in \mathfrak{h}'$ und $b \in \mathfrak{h}'$ folgt $a \in \dot{g} - \dot{E}$ oder $b \in \dot{g} - \dot{E}$ oder $a \in \mathfrak{h} \cap \dot{E}$ und $b \in \mathfrak{h} \cap \dot{E}$. Aus $a \in \dot{g} - \dot{E}$ und $b \in \mathfrak{h}'$ folgt zunächst $b \in \dot{g}$ und $ab \in \dot{g} - \dot{E}$. Ebenso folgt aus $b \in \dot{g} - \dot{E}$ und $a \in \mathfrak{h}'$ sofort $ab \in \dot{g} - \dot{E}$. Aus $a \in \mathfrak{h} \cap \dot{E}$ und $b \in \mathfrak{h} \cap \dot{E}$ folgt $ab \in \mathfrak{h}$ und $ab \in \dot{E}$, also $ab \in \mathfrak{h} \cap \dot{E}$. Für jedes $a, x \in G$ gilt

$$3) \ a \in \mathfrak{h}' \Rightarrow xax^{-1} \in \mathfrak{h}'.$$

$\mathfrak{h}$, $\dot{E}$ und $\dot{g} - \dot{E}$ sind nämlich invariante Untermengen von G .

Für jedes $a \in G$ gilt

$$4) \ a \bar{\in} \mathfrak{h}' \Rightarrow a^{-1} \in \mathfrak{h}'.$$

Es gilt entweder $a \in \dot{E}$ oder $a \bar{\in} \dot{E}$. Aus $a \in \dot{E}$ folgt wegen $a \bar{\in} \mathfrak{h}'$ zunächst $a \bar{\in} \mathfrak{h}$, also $a^{-1} \in \mathfrak{h}$, woraus sich $a^{-1} \in \mathfrak{h} \cap \dot{E} \subseteq \mathfrak{h}'$ ergibt. Aus $a \bar{\in} \dot{E}$ folgt wegen $a \bar{\in} \mathfrak{h}'$ zunächst $a \bar{\in} \dot{g}$, also $a^{-1} \in \dot{g}$, woraus sich $a^{-1} \in \dot{g} - \dot{E} \subseteq \mathfrak{h}'$ ergibt.

Zum Beweis von Satz 3 ist jetzt noch zu zeigen, daß jede lineare, s -zulässige Halbgruppe $\dot{g}$, für die $\dot{E} = E$ gilt, minimal ist. Aus der Existenz einer linearen, s -zulässigen Halbgruppe $\mathfrak{h}$, für die $\mathfrak{h} \subset \dot{g}$ gilt, folgt nämlich, daß es ein $a \in \dot{g}$ gibt, so daß $a \bar{\in} \mathfrak{h}$, also $a^{-1} \in \mathfrak{h} \subseteq \dot{g}$ und $a \bar{\in} g$ gilt. Wegen $a \in \dot{E}$ und $a \bar{\in} E$ folgt also $\dot{E} > E$.

Satz 2 und Satz 3 ergeben für den Fall einer streng halbgeordneten Gruppe (deren Einheitengruppe also nur aus dem Einselement

⁴⁾ $\mathfrak{h}'$ besteht also aus den Einheiten von $\dot{g}$, soweit sie in $\mathfrak{h}$ liegen und aus den Nichteinheiten von $\dot{g}$.

1 besteht), daß jede strenge Halbordnung, die überhaupt Konjunktion von Ordnungen ist, auch stets Konjunktion von strengen Ordnungen ist. Damit ist bewiesen

Satz 4. Eine Halbordnung einer Gruppe ist genau dann Konjunktion von strengen Ordnungen, wenn die Halbordnung streng ist und wenn die zugehörige Halbgruppe s -abgeschlossen ist.

Mit Hilfe von Satz 4 können wir jetzt sofort die Frage beantworten, wann eine beliebige Gruppe sich streng ordnen läßt. Gibt es nämlich eine strenge Ordnung $\leq$ einer Gruppe G , so ist auch $\geq$ eine strenge Ordnung. Wegen

$$a \leq b, a \geq b \Rightarrow a = b$$

ist dann also die Gleichheitsrelation " $=$ " Konjunktion von strengen Ordnungen.

Ist umgekehrt die Gleichheitsrelation Konjunktion von strengen Ordnungen, so gibt es jedenfalls strenge Ordnungen der Gruppe. Die zur Gleichheitsrelation zugehörige Gruppe besteht nur aus dem Einselement.

Also haben wir als Antwort auf unsere Frage

Satz 5. Eine Gruppe läßt sich genau dann streng ordnen, wenn es außer 1 keine von 1 s -abhängigen Elemente gibt.

Läßt sich eine Gruppe G nicht streng ordnen, so gibt es stets von 1 verschiedene von 1 s -abhängige Elemente. Diese bilden dann einen Normalteiler N von G . N ist nämlich der Durchschnitt aller linearen invarianten Unterhalbgruppen von G , also jedenfalls eine invariante Unterhalbgruppe. Daß N sogar eine Gruppe ist, ergibt sich sofort daraus, daß für jede Ordnung $\leq$ auch $\geq$ eine Ordnung ist⁵⁾.

§ 3.

Satz 5 liefert für kommutative Gruppen das einfache Ergebnis, daß sich eine kommutative Gruppe genau dann streng ordnen läßt, wenn sie keine Elemente endlicher Ordnung außer 1 enthält, wenn sie also torsionsfrei ist.

Für eine kommutative Gruppe G ist nämlich eine Unterhalbgruppe genau dann s -abgeschlossen, wenn für jedes $a \in G$ und jede natürliche Zahl n gilt

$$a^n \in g \Rightarrow a \in g.$$

Wir zeigen im Folgenden, daß sich Satz 4 für den kommutativen Fall auch aus einem allgemeineren Satz über kommutative Halbgruppen herleiten läßt. Dies ist vor allem deshalb bemerkenswert, weil hier die Gruppeneigenschaften, die in Teil 1 unentbehrlich zu sein scheinen, keine Rolle mehr spielen.

⁵⁾ Gilt $a \in N$, so gilt $a \geq 1$ für jede Ordnung $\leq$. Da auch $\geq$ eine Ordnung ist, gilt auch $a \leq 1$, d. h. $a^{-1} \geq 1$.

Hieraus folgt $a^{-1} \in N$.

Es sei also H eine kommutative Halbgruppe, d. h. eine Menge, in der eine kommutative, assoziative Multiplikation definiert ist und in der ein Einselement 1 existiert mit $1 \cdot a = a$ für jedes $a \in H$. $a, b, \dots$ seien die Elemente von H , $\mathfrak{h}$ sei eine Unterhalbgruppe von H . Wir nennen $\mathfrak{h}$ streng, wenn für jedes a, b mit $a \in \mathfrak{h}$ und $b \in \mathfrak{h}$ gilt

$$a \neq 1, b \neq 1 \Rightarrow ab \neq 1.$$

Wir nennen $\mathfrak{h}$ prim in H , wenn für jedes a, b gilt

$$a \bar{\in} \mathfrak{h}, b \bar{\in} \mathfrak{h} \Rightarrow ab \bar{\in} \mathfrak{h}.$$

Wir nennen $\mathfrak{h}$ abgeschlossen in H , wenn für jedes a und jede natürliche Zahl n gilt

$$a^n \in \mathfrak{h} \Rightarrow a \in \mathfrak{h}.$$

Ist H eine Gruppe, so entsprechen die strengen Unterhalbgruppen ersichtlich eineindeutig den strengen Halbordnungen von H .

Die abgeschlossenen Unterhalbgruppen sind genau die s -abgeschlossenen Unterhalbgruppen.

Ferner sind die primen Unterhalbgruppen genau die linearen Unterhalbgruppen: Denn, jede lineare Unterhalbgruppe einer Gruppe ist prim, da aus $a \bar{\in} \mathfrak{h}$ ja $a < 1$ folgt⁶⁾ und

$$a < 1, b < 1 \Rightarrow ab < 1$$

gilt. Jede prime Unterhalbgruppe $\mathfrak{h}$ ist aber auch linear, da für kein a gelten kann $a \bar{\in} \mathfrak{h}$ und $a^{-1} \bar{\in} \mathfrak{h}$. Hieraus würde nämlich $1 = aa^{-1} \bar{\in} \mathfrak{h}$ folgen.

Für beliebige Halbgruppen H gilt nun

Satz 6. Jede abgeschlossene Unterhalbgruppe ist Durchschnitt primen Unterhalbgruppen.

Beweis. $\mathfrak{h}$ sei eine abgeschlossene Unterhalbgruppe. Wir haben zu zeigen, daß es für jedes c mit $c \bar{\in} \mathfrak{h}$ eine prime Unterhalbgruppe $\bar{\mathfrak{h}}$ gibt mit $\mathfrak{h} \leq \bar{\mathfrak{h}}$ und $c \bar{\in} \bar{\mathfrak{h}}$. Zunächst gibt es jedenfalls eine strenge Unterhalbgruppe $\mathfrak{g}_0$, für die gilt:

$$1) \cdot c \in \mathfrak{g}_0$$

$$2) \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{h} = 1.$$

Die Potenzen c^n ($n = 0, 1, \dots$) bilden nämlich eine solche Unterhalbgruppe, da aus $c^n \in \mathfrak{h}$, insbesondere aus $c^n = 1$ sofort $c \in \mathfrak{h}$ folgen würde, wenn $n > 0$ ist.

Durch einen Wohlordnungsschluß ergibt sich die Existenz einer maximalen strengen Unterhalbgruppe, für die 1) und 2) gilt.

Sei $\mathfrak{g}$ eine solche maximale Unterhalbgruppe und

$$3) a \bar{\in} \mathfrak{g}$$

$$4) b \bar{\in} \mathfrak{g}.$$

⁶⁾ Die $\mathfrak{h}$ entsprechende Ordnung von H bezeichnen wir mit $\leq$.

Mit g_a bezeichnen wir die Halbgruppe der Elemente $g a^n$ ($g \in g$, $n = 0, 1, \dots$). Es gilt $g_a > g$, also ist g_a nicht streng oder $g_a \cap \bar{h} \neq 1$. In jedem Falle gibt es ein Element g_1 von g und eine natürliche Zahl m , so daß gilt

$$5) g_1 a^m \in \bar{h}.$$

Ebenso gibt es ein Element g_2 von g und eine natürliche Zahl n , so daß gilt

$$6) g_2 b^n \in \bar{h}.$$

Hieraus folgt

$$7) g_1^n g_2^m (ab)^{mn} \in \bar{h}.$$

Ist jetzt $ab \neq 1$ und $g_1^n g_2^m (ab)^{mn} = 1$, so ist g_{ab} nicht streng. Ist aber $g_1^n g_2^m (ab)^{mn} \neq 1$, so ist $g_{ab} \cap \bar{h} \neq 1$.

Also gilt $ab = 1$ oder $g_{ab} > g$, d. h. $ab \bar{\in} g$.

Bezeichnen wir jetzt mit $\bar{g}$ die Menge der Elemente a mit $a \bar{\in} g$, so ist die Menge $\{1\} \cup \bar{g}$ eine Halbgruppe $\bar{h}$.

Für diese gilt

$$c \bar{\in} \bar{h}$$

$$\bar{h} \leq \bar{h}.$$

$\bar{h}$ ist aber auch prim, denn für jedes a, b mit $a \bar{\in} \bar{h}$ und $b \bar{\in} \bar{h}$ gilt $a \neq 1$, $b \neq 1$, $a \in g$ und $b \in g$, also, da g eine strenge Halbgruppe ist, $ab \neq 1$ und $ab \in g$, d. h. $ab \bar{\in} \bar{h}$.

Satz 7. Jede strenge, abgeschlossene Unterhalbgruppe ist Durchschnitt strenger, primer Unterhalbgruppen⁷⁾.

Beweis. Unter den Voraussetzungen des Beweises von Satz 6 folgt aus $ab = 1$ in 7), nämlich

$$g_1^n g_2^m \in \bar{h}$$

also $g_1^n g_2^m = 1$ und $g_1 = g_2 = 1$, da g streng ist.

Wegen 5) und 6) gilt dann aber $a^m \in \bar{h}$ und $b^n \in \bar{h}$, also $a \in \bar{h}$ und $b \in \bar{h}$ und $a = b = 1$, wenn $\bar{h}$ streng ist.

Dies widerspricht aber 3) und 4).

Somit gilt

$$a \bar{\in} g, b \bar{\in} g \Rightarrow ab \bar{\in} g,$$

d. h. g ist prim und $\bar{h} = \{1\} \cup \bar{g}$ ist streng.

⁷⁾ Die Umkehrung dieses Satzes ist trivial. Also ist Satz 7 für kommutative Gruppen gleichwertig mit Satz 4.

Einführung in die Atomphysik

Von

Professor Dr. Wolfgang Finkelburg

Mit 193 Abbildungen. VIII, 339 Seiten. 1948.

DMark 28.—

Inhaltsübersicht:

I. Einleitung — II. Atome, Ionen, Elektronen, Atomkerne — III. Atom-
spektren und Atombau — IV. Die quantenmechanische Atomtheorie — V. Die
Physik der Atomkerne — VI. Physik der Moleküle — VII. Der flüssige und
der feste Zustand der Materie vom Standpunkt der Atomphysik.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

In der Sammlung „Technische Physik in Einzeldarstellungen“ ist erschienen:

BAND 6

Hochstromkohlebogen

Von

Professor Dr. Wolfgang Finkelburg

Mit 132 Abbildungen. VIII, 221 Seiten. 1948.

DMark 22.50

Inhaltsübersicht:

I. Einleitung — II. Überblick über Eigenschaften und Mechanismus des
Niederstromkohlebogens — III. Allgemeine Eigenschaften und Betriebsbe-
dingungen des Hochstromkohlebogens — IV. Die physikalischen Eigen-
schaften des Hochstromkohlebogens — V. Bogenmechanismus und Theorie
des Hochstromkohlebogens — VI. Die technischen Anwendungen des Hoch-
stromkohlebogens.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
J. F. BERGMANN / MÜNCHEN

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen
mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete

Herausgegeben von

W. Blaschke · R. Grammel · E. Hopf · F.K. Schmidt · B.L. van der Waerden

BAND I: Vorlesungen über Differentialgeometrie. Von Wilhelm Blaschke.

I. Teil: Elementare Differentialgeometrie. Vierte, unveränderte Auflage. Mit 35 Textfiguren. X, 311 Seiten. 1945.
DMark 18.—

BAND II: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Von Dr. Konrad Knopp, ord. Professor der Mathematik an der Universität Tübingen. Vierte Auflage. Mit 14 Textfiguren. XII, 583 Seiten. 1947. DMark 39.60

BAND IV: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Von Dr. Erwin Madelung, ord. Professor an der Universität Frankfurt a. M. Vierte, berichtigte Auflage. Mit 29 Abbildungen. Etwa 500 Seiten.

Erscheint Anfang 1950.

BAND XXVII: Grundzüge der theoretischen Logik. Von D. Hilbert† und W. Ackermann. Dritte, verbesserte Auflage. VIII, 155 Seiten. 1949. DMark 16.50; gebunden DMark 19.80

BAND LII: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Von Dr. Wilhelm Magnus, Professor der Mathematik an der Universität Göttingen, und Dr. Fritz Oberhettinger, Dozent der Mathematik an der Universität Mainz. Zweite Auflage. VIII, 230 Seiten. 1948. DMark 24.60

BAND LIII: Rechenmethoden der Quantentheorie dargestellt in Aufgaben und Lösungen.

1. Teil: Elementare Quantenmechanik. Von Dr. Siegfried Flügge, ord. Professor an der Universität Marburg, unter Mitarbeit von Dr. Hans Marschall, Marburg. Mit 18 Abbildungen. X, 240 Seiten. 1947. DMark 18.—

BAND LIV: Tabellen zur Laplace-Transformation und Anleitung zum Gebrauch. Von Professor Dr. G. Doetsch. Mit 9 Figuren. VIII, 185 Seiten. 1947. DMark 18.—

BAND LV: Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik. Von Dr. Fritz Oberhettinger, Dozent der Mathematik an der Universität Mainz, und Dr. Wilhelm Magnus, Professor der Mathematik an der Universität Göttingen. Mit 54 Abbildungen. VII, 126 Seiten. 1949. DMark 15.60; Ganzleinen DMark 18.30

BAND LVI: Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode. Von G. Köthe und O. Toeplitz. Band I. Mit 148 Textabbildungen. IX, 181 Seiten. DMark 19.60; gebunden 22.60. Erscheint Anfang 1950.

BAND LVII: Theoretische Mechanik. Von Dr. Georg Hamel, ord. Professor an der Technischen Hochschule Berlin. Mit 161 Abbildungen. XVI, 796 Seiten. DMark 63.—; gebunden DMark 66.—. Erscheint Anfang 1950.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Veröffentlicht unter Zulassung Nr. 100 der Britischen Militärregierung.

Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg.

Druck: Dieterichsche Universitäts-Buchdruckerei W. Fr. Kaestner, Göttingen. — Printed in Germany.